ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

Ποια συνάρτηση ονομάζεται αρχική ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες (1+1+1+1)=4

Α3. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.

Μονάδες (2+2+2+3)=9

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. *Μαθηματικός Περιηγητής*

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ’ανάγκη $f(\beta)>0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο Α είναι συνεχής στο Α και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Α, τότε η f είναι πάντα σταθερή σε όλο το σύνολο Α.

δ) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^\alpha f(x)\,dx=0$$

Μονάδες (2x4)=8

ΘΕΜΑ Β

Μιχάλης Σουλάνης

Έστω συναρτήσεις $f, g : \Re \to \Re$ για τις οποίες ισχύουν:

- $(fof)(x) = 4x - 3 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad : (1)$
- $(gof)(x) = x + 1 - e^{3(x-1)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad : (2)$

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.

Μονάδες 5

ii. Να δείξετε ότι $f(R) = R$.

Μονάδες 6

iii. Να υπολογίσετε το $f(1)$

Μονάδες 5

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Κώστας Σερίφης

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(x) = xe^{-x}$, $x \ge 0$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 5

2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f στο $[0, +\infty)$

Μονάδες 7

3. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2 - x = \ln 2 - \ln x$

Μονάδες 6

4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) f(\eta\mu x) \right)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ *Βασίλης Μαυροφρύδης*

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\mathbf{f,g}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$ και $\mathbf{F}$ μία αρχική της $\mathbf{f}$ στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $\mathbf{F(0)=0}$. Η $\mathbf{f}$ είναι τέτοια ώστε να ισχύει $\mathbf{f(0)=0}$ και για κάθε $\mathbf{x}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ικανοποιεί την

$$\mathbf{f'(x)=e^{2F(x)}}\ .$$

Δ1. Να δείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 3

Δ2. Να δείξετε ότι

$$\mathbf{f'(x)=f^2(x)+1} \text{ για κάθε } \mathbf{x}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Μονάδες 3

Δ3. Να δείξετε ότι $\mathbf{f}\left(\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\pi}{3}$ και ότι υπάρχει μοναδικό $\mathbf{x_0}\in\left(\mathbf{0},\frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{f(x_0)=1}\ .$$

Μονάδες 5

Δ4. Αν $\mathbf{x_0}$ ο αριθμός του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\mathbf{I}=\int_0^{x_0}\mathbf{f(x)\sqrt{1+f^2(x)}dx}\ .$$

Μονάδες 3

Δ5. Να λύσετε την ανίσωση

$$\mathbf{f'(x)f'\left(\frac{1}{2}\right)>f'(x+1)f'\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

Μονάδες 6

Δ6. Έστω η συνάρτηση $\mathbf{q(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)-\eta\mu x, x}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Να δείξετε ότι η q είναι σταθερή και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f.

Μονάδες 5

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α4. α)Σ, β)Λ, γ)Λ, δ)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ (*) .Τότε έχουμε :

$$f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) \Leftrightarrow (fof)(x_1) = (fof)(x_2) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 4x_1 - 3 = 4x_2 - 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

επομένως η f είναι $1-1$

Β2.Έστω $y \in \mathbb{R}$ τότε για $x = f(\frac{y+3}{4})$ έχουμε :

$$f(x) = f\left(f\left(\frac{y+3}{4}\right)\right) = (fof)\left(\frac{y+3}{4}\right) = 4\frac{y+3}{4} - 3 = y$$

Επομένως είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Β3.

Θέτοντας $x = 1$ στην αρχική (1) έχουμε: $(fof)(1) = 4 - 3 \Leftrightarrow (fof)(1) = 1$ (I)

Θέτοντας $x = f(1)$ στην αρχική (1) έχουμε:

$$(fof)(f(1)) = 4f(1) - 3 \Leftrightarrow f\big((fof)(1)\big) = 4f(1) - 3 \overset{(I)}{\Leftrightarrow} f(1) = 4f(1) - 3 \Leftrightarrow 3f(1) = 3 \Leftrightarrow f(1) = 1$$

Β4.

Θέτοντας $x = 1$ στην αρχική (2) έχουμε:

$$(gof)(1) = 1 + 1 - e^{3(1-1)} \Leftrightarrow g\big(f(1)\big) = 2 - e^0 \xLeftrightarrow{f(1)=1} g(1) = 1$$

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1,1)$.Θα δείξουμε ότι το $A(1,1)$ είναι και το μόνο σημείο στο οποίο αυτές τέμνονται.

Ας υποθέσουμε ότι οι C_f, C_g τέμνονται και σε κάποιο άλλο σημείο $B(k,k)$, $k \neq 1$, θα ναι τότε:

$f(k) = g(k)$ (II)

Όμως $k \in \mathbb{R} = f(\mathbb{R})$ επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = k$ (III)

Η (II) γράφεται

$$f\big(f(x_0)\big) = g\big(f(x_0)\big) \Leftrightarrow (fof)(x_0) = (gof)(x_0) \xLeftrightarrow{(1),(2)} 4x_0 - 3 = x_0 + 1 - e^{3(x_0-1)} \Leftrightarrow$$

$$3(x_0 - 1) + e^{3(x_0-1)} - 1 = 0 \xLeftrightarrow{h(x)=3x+e^x-1} h(x_0 - 1) = 0 = h(0) \overset{h\uparrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x_0 = 1 \text{ (IV)}$$

διότι η $h(x) = 3x + e^x - 1$ έχει $h'(x) = 3 + e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και άρα είναι $h \uparrow \mathbb{R}$

Όμως από το συμπέρασμα της (IV) προκύπτει $x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = f(1) = 1 \Rightarrow k = 1$, άτοπο.

Επομένως οι C_f, C_g δεν τέμνονται σε άλλο σημείο, παρά μόνο στο σημείο $A(1,1)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0$

1. **Μονοτονία** της f στο $[0,+\infty)$. Είναι $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x), \quad x \geq 0$ Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$
2. **Σύνολο τιμών** της f στο $[0,+\infty)$ Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ οπότε $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[0, \frac{1}{e}\right]$ Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ οπότε $f([1,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = \left(0, \frac{1}{e}\right]$ Άρα $f([0,+\infty)) = \left[0, \frac{1}{e}\right]$

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0\right)$$

3. **Πλήθος των ριζών της εξίσωσης** $2 - x = \ln 2 - \ln x$ Η εξίσωση για $x > 0$ γίνεται ισοδύναμη με την $2 - x = \ln\frac{2}{x} \Leftrightarrow e^{2-x} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow xe^2e^{-x} = 2 \Leftrightarrow xe^{-x} = 2e^{-2} \Leftrightarrow f(x) = f(2)$

   Στο διάστημα $[1,+\infty)$, όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα, η εξίσωση $f(x) = f(2)$ έχει μοναδική ρίζα το 2.

   Στο διάστημα $[0,1]$, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα, με σύνολο τιμών το $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ και $f(2) \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$, η $f(x) = f(2)$ θα έχει ακριβώς μία ρίζα.

   Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = f(2)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, μία στο διάστημα $[0,1]$ και το 2

4. **Υπολογισμός του** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)f(\eta\mu x)\right)$ Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ οπότε από το θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής θα έχει μια ελάχιστη τιμή, έστω ε, και μια μέγιστη έστω μ.
   Εφόσον $\eta\mu x \in [-1,1]$ θα είναι: $\varepsilon \leq f(\eta\mu x) \leq \mu \Rightarrow \varepsilon f(x) \leq f(x)f(\eta\mu x) \leq \mu f(x)$ για κάθε x κοντά στο $+\infty$ Ακόμα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\varepsilon f(x)\right) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mu f(x)\right) = 0$ και έτσι από το Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)f(\eta\mu x)\right) = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι,

$$f'(x)=e^{2F(x)}>0 \text{ για κάθε } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

άρα,

$$\text{η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Επίσης:

- η F είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, ως αρχική της f στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ άρα η συνάρτηση $h(x)=2F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,
- η $y=e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $h\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Άρα,

η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων,

οπότε η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Δ2. Αφού η f' είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε:

$$f''(x)=\left(e^{2F(x)}\right)'=e^{2F(x)}\left(2F(x)\right)'=$$

$$=2f(x)e^{2F(x)}\Leftrightarrow f''(x)=2f(x)f'(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f'(x)\right)'=\left(f^2(x)\right)',\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$

επομένως, υπάρχει $c\in R$ (πραγματική σταθερά), ώστε:

$$f'(x)=f^2(x)+c,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\quad :(1).$$

Από την (1), για $x=0$, έχουμε:

$$f'(0)=f^2(0)+c\Leftrightarrow e^{2F(0)}=f^2(0)+c \overset{(f(0)=0)=F(0))}{\Leftrightarrow} c=1$$

άρα,

$$\boxed{\mathbf{f'(x)=f^2(x)+1}} \text{ για κάθε } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\quad :(E).$$

Δ3. Α τρόπος

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ άρα και συνάρτηση $1-1$

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-x, x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$.

Η φ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$, είναι $\varphi'(x)=f'(x)-1=f^2(x)>0$ (αφού η f παίρνει την τιμή 0, μόνο στο 0 ως συνάρτηση $1-1$), άρα

η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$, ως συνεχής σε αυτό.

Έχουμε

$$0<\frac{\pi}{3}\Rightarrow\varphi(0)<\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow 0<f\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\pi}{3}\ .$$

Β τρόπος

Η συνάρτηση f ως παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, είναι:

- συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\subseteq\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,
- παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\subseteq\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

οπότε,

η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις **θεωρήματος μέσης τιμής** στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$,

άρα,

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{3}-0}=\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}}$$

Από την (E) για $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ έχουμε:

$$f'(\xi)=f^2(\xi)+1\Rightarrow\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}}=f^2(\xi)+1.$$

Επειδή,

η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε:

$$-\frac{\pi}{2}<0<\xi<\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(0)<f(\xi)\Rightarrow f(\xi)>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f^2(\xi)+1>1\Rightarrow\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}}>1\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\pi}{3}$$

Έχουμε:

$$f \text{ συνεχής στο } \left[0, \frac{\pi}{3}\right],$$

$$0 = f(0) < 1 < \frac{\pi}{3} < f\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

οπότε, από το **θεώρημα ενδιαμέσων τιμών,** έπεται ότι:

$$\text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \text{ τέτοιο ώστε:}$$

$$\boxed{\mathbf{f(x_0)=1}} \ : (2).$$

Δ4. Επειδή, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι και «$1-1$»,

άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Α τρόπος

Από την (E) για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε:

$$f'(x) = f^2(x) + 1 \Rightarrow f'(x) = \left(\sqrt{f^2(x)+1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = \sqrt{f^2(x)+1} \overset{(\cdot f(x))}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{f^2(x)+1}} = f(x)\sqrt{f^2(x)+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(f^2(x)+1\right)'}{2\sqrt{f^2(x)+1}} = f(x)\sqrt{f^2(x)+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{f^2(x)+1}\right)' = f(x)\sqrt{f^2(x)+1} \quad : (\Sigma)$$

Έχουμε:

$$I = \int_0^{x_0} f(x)\sqrt{1+f^2(x)}\,dx \overset{(\Sigma)}{=} \int_0^{x_0} \left(\sqrt{f^2(x)+1}\right)' dx =$$

$$= \left[\sqrt{f^2(x)+1}\right]_0^{x_0} = \sqrt{f^2(x_0)+1} - \sqrt{f^2(0)+1} \underset{f(0)=0}{\overset{(2)}{=}}$$

$$= \sqrt{1^2+1} - \sqrt{0^2+1} = \sqrt{2} - 1$$

Β τρόπος

$$I = \int_0^{x_0} f(x)\sqrt{1+f^2(x)}dx = \int_0^{x_0} f(x)\sqrt{f'(x)}dx = \int_0^{x_0} f(x)\sqrt{e^{2F(x)}}dx =$$

$$= \int_0^{x_0} F'(x)e^{F(x)}dx = \left[e^{F(x)}\right]_0^{x_0} = \left[\sqrt{f^2(x)+1}\right]_0^{x_0} = \sqrt{f^2(x_0)+1} - \sqrt{f^2(0)+1} \underset{f(0)=0}{\overset{(2)}{=}}$$

$$= \sqrt{1^2+1} - \sqrt{0^2+1} = \sqrt{2} - 1$$

Δ5. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης

$$f'(x)f'\left(\frac{1}{2}\right) > f'(x+1)f'\left(-\frac{1}{2}\right) : (A) \text{ είναι το } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}-1\right).$$

$$f'(x)f'\left(\frac{1}{2}\right) > f'(x+1)f'\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow e^{2F(x)} \cdot e^{2F\left(\frac{1}{2}\right)} > e^{2F(x+1)} \cdot e^{2F\left(-\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$e^{2F(x)+2F\left(\frac{1}{2}\right)} > e^{2F(x+1)+2F\left(-\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow 2F(x)+2F\left(\frac{1}{2}\right) > 2F(x+1)+2F\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$F(x)+F\left(\frac{1}{2}\right) > F(x+1)+F\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right) > F(x+1)-F(x) : (A_1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x)=F(x+1)-F(x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}-1\right),$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων αφού η είναι F παραγωγίσιμη ως αρχική της f στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}-1\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και η $F \circ (x+1)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθετη παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}-1\right)$.

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}-1\right)$ είναι :

- $h'(x)=\left(F(x+1)-F(x)\right)' = f(x+1)\cdot(x+1)' - f(x) = f(x+1)-f(x)$ και
- $x+1>x \overset{f \text{ γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f(x+1)>f(x) \Rightarrow h'(x)>0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}-1\right)$

.

Επομένως, από την (A_1) ισοδύναμα έχουμε:

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) > h(x) \overset{h \text{ γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x < -\frac{1}{2}$$

Συναληθεύοντας με το σύνολο ορισμού της (A) , τελικά είναι $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Δ6. Η q είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$\begin{aligned} q'(x) &= -\eta\mu x \cdot f(x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(x) - \sigma\upsilon\nu x = \\ &= -\eta\mu x \cdot f(x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot \left(f^2(x)+1\right) - \sigma\upsilon\nu x = \\ &= -\eta\mu x \cdot f(x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot f^2(x) = \\ &= f(x)\left(\sigma\upsilon\nu x \cdot f(x) - \eta\mu x\right) = \\ &= f(x)q(x) = F'(x)q(x) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}&q'(x)-F'(x)q(x)=0\Rightarrow\\&e^{F(x)}q'(x)-F'(x)e^{F(x)}q(x)=0\Rightarrow\\&e^{F(x)}q'(x)-\left(e^{F(x)}\right)'q(x)=0\Rightarrow\\&\left(\frac{q(x)}{e^{F(x)}}\right)'=0\end{aligned}$$

επομένως, υπάρχει $k\in R$ (πραγματική σταθερά), ώστε:

$$\frac{q(x)}{e^{F(x)}}=k,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Για $x=0:\dfrac{q(0)}{e^{F(0)}}=k\Rightarrow 0=k$

Δηλαδή

$\dfrac{q(x)}{e^{F(x)}}=0\Rightarrow q(x)=0,\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (σταθερή).

Επειδή $q(x)=0\Rightarrow συνx\cdot f(x)-ημx=0$ και έπεται ότι $f(x)=εφx, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις της άσκησης.