

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 5**

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 6 ΜΑΪΟΥ 2016

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ**

**ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A1.** Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης  $C_f$  μίας συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(x_0, f(x_0))$  ;

**(Μονάδες 4)**

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

**(Μονάδες 4)**

**A3.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^v$ ,  $v \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ότι ισχύει:

$$f'(x) = vx^{v-1}, \text{ δηλαδή } (x^v)' = vx^{v-1}.$$

**(Μονάδες 7)**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

**β.** Αν  $f(x) = \int_2^4 \sqrt{2+t^2} dt$ , τότε  $f'(3) = 0$ .

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

## ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ. Μια συνάρτηση  $f$  είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον  $x'x$ ) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε υποχρεωτικά  $f'(x)>0$  για κάθε  $x\in\mathbb{R}$ .

ε. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  έχει στο  $+\infty$  οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .

(Μονάδες  $5\times 2=10$ )

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$(fof)(x)+2f(x)=2x+1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(2)=5.$$

**B1.** Να βρείτε το  $f(5)$ .

(Μονάδες 5)

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

(Μονάδες 7)

**B3.** Να βρείτε το  $f^{-1}(2)$ .

(Μονάδες 6)

**B4.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}(2x^2+7x)-1\right)=2.$$

(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με  $g$  παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$ , για τις οποίες ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$f(x) = x(x+a) - x + 1 \text{ με } a, x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g'(x) \ln x = \frac{2g(x)}{x}, \text{ για κάθε } x > 1$$

**Γ1.** Αν  $f(x) - 1 \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι  $a=1$ .

**(Μονάδες 3)**

**Γ2.** Αν  $g(e) = -1$ , να δείξετε ότι  $g(x) = -\ln^2 x$ , για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .

**(Μονάδες 5)**

**Γ3.** Αν  $g(x) = -(\ln x)^2$  σε όλο το διάστημα  $(0, +\infty)$

**i)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή  $x_0 \in (0, 1)$  για την οποία η διαφορά  $f(x) - g(x)$  γίνεται ελάχιστη.

**(Μονάδες 5)**

**ii)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ζεύγος σημείων  $M, N$  με  $M(\xi, f(\xi))$  σημείο της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  και  $N(\xi, g(\xi))$  σημείο της γραφικής παράστασης  $C_g$  της  $g$  με  $\xi \in (0, +\infty)$ , στα οποία οι  $C_f$  και  $C_g$  δέχονται παράλληλες εφαπτομένες στα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα.

**(Μονάδες 4)**

**ii)** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{(x-1)^x}{\eta\mu(x-1) + \frac{g(x)}{f(x)}} \right]$

**(Μονάδες 4)**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ4. i)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_g$  των  $f$  και  $g$  αντίστοιχα και των ευθειών  $x=1$ ,  $x=e$ .

(Μονάδες 4)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) + f(1-x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Δ1.** Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$

(Μονάδες 4)

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 2f(1)$

(Μονάδες 3)

**Δ3.** Έστω η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$ , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα  $x'x$ , σχηματίζει με αυτόν γωνία  $45^\circ$ .

(Μονάδες 4)

**Δ4. i)** Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 f(x) dx = 0$

(Μονάδες 3)

Δίνεται επιπλέον ότι  $\int_0^1 f'(x) dx = 1$  καθώς και ότι η συνάρτηση

$f^{-1}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 6 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\Omega)$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$  και τις ευθείες  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{2}$ .

(Μονάδες 4)

Δ5. i) Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x)dx, \text{ όπου } \lambda > \frac{1}{2}$$

(Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^{\lambda}}$$

(Μονάδες 3)

## ΑΡΧΗ 6ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

### Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν . **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια , διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

Επιστημονική επιμέλεια: Συντακτική ομάδα [www.mathp.gr](http://www.mathp.gr)

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών