ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 4

Α3. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0.

β) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_o .

δ) Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο Α είναι συνεχής στο Α και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Α , τότε η f είναι πάντα σταθερή στο Α.

ε) Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Μονάδες 2×5 = 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 2}$, $\alpha, \beta \in R$ με $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -6$.

Μονάδες 7

Β2. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f^2(x_o) = x_o^4 + x_o^2 + 12$$

Μονάδες 6

Β3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}, \qquad x > 0$$

Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

Μονάδες 6

Β4. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{h(x)}{f(x)}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν

- $f(1)=1$ και
- $x^2f'(x)=2x^2-xf(x)-1$, για κάθε $x>0$

Γ1. Να δείξετε ότι

$$f(x)=\frac{x^2-\ln x}{x},\quad x>0$$

μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι

$$\int_1^2 2^{\frac{\ln x}{x}}dx\le\frac{1}{\ln 2},\qquad x>0$$

μονάδες 7

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και την ευθεία $x=e$.

(μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathrm{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $\int_0^{f(1)} xe^x dx = 0$
- $f\left(e^{f'(x)}\right) + \ln[x \cdot f'(x)] = f\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$ για κάθε $x > 0$

Δ1. **i)** Να δείξετε ότι $f(1) = 0$

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x > 0$

μονάδες 3+5

Δ2. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\kappa > e$, ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x = \kappa$ και $x = \kappa^2$, να είναι ίσο με $15 \ln 3 - 6$.

μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι για κάθε $0 < \alpha < \beta$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε:

$$f\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{x_1+x_2}\right] = x_1 f(\alpha) + x_2 f(\beta)$$

μονάδες 5

Δ4. Ένα κινητό Μ κινείται στην καμπύλη $y = f(x)$. Καθώς το Μ περνάει από το σημείο $A\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$ η τετμημένη x ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\hat{\theta} = M\hat{O}x$ τη χρονική στιγμή που το κινητό Μ διέρχεται από το σημείο Α (όπου Ο η αρχή των αξόνων).

μονάδες 6

Σας ευχόμαστε επιτυχία στις Πανελλαδικές!!!