ΘΕΜΑ Β.

Β1) Είναι $f(x) = \dfrac{x^2+ax+\beta}{x-2} \Leftrightarrow x^2+ax+\beta = f(x)\cdot(x-2)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+\beta) = \lim\limits_{x\to 2}\big(f(x)(x-2)\big) \Leftrightarrow 4+2a+\beta = 5\cdot 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4+2a+\beta = 0$.

Για $\beta = -2a-4$ είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+ax-2a-4}{x-2} = 5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+a+2)}{\cancel{x-2}} = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4+a = 5 \Leftrightarrow a = 1$ και $\beta = -6$.

Β2) Θεωρώ $\varphi(x) = f^2(x) - x^4 - x^2 - 12$, $x \in [0,1]$.

- φ συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων για κάθε $x \in [0,1]$.
- $\left.\begin{aligned}\varphi(0) &= f^2(0) - 12 = 9-12 < 0\\ \varphi(1) &= f^2(1) - 14 = 16-14 > 0\end{aligned}\right\}\ \varphi(0)\cdot\varphi(1) < 0$.

Άρα, λόγω Θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ ώστε $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) = x_0^4 + x_0^2 + 12$.

B3 Για $\alpha=1$ και $\beta=-6$ είναι $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2} \Leftrightarrow$

$f(x)=x+3$ με $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

$$\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-3,2)\cup(2,+\infty)$$

Άρα ορίζεται η $h=g\circ f$ και μάλιστα

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{\ln(x+3)}{x+3} \quad \text{με } x\in(-3,2)\cup(2,+\infty)$$

B4 $$\lim_{x\to-3^+}\frac{h(x)}{f(x)}=\lim_{x\to-3^+}\frac{\ln(x+3)}{(x+3)^2}=\lim_{x\to-3^+}\left(\ln(x+3)\cdot\frac{1}{(x+3)^2}\right)=-\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to-3^+}\left(\ln(x+3)\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{1}{(x+3)^2}=+\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Είναι για κάθε $x>0$,

$$x^2 \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow$$
$$x \cdot f'(x) + f(x) = 2x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$
$$\left(x \cdot f(x)\right)' = 2x - \frac{1}{x}.$$

Άρα $x \cdot f(x) = x^2 - \ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Για $x=1$ είναι $1 \cdot f(1) = 1 - \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$.

Επομένως $x \cdot f(x) = x^2 - \ln x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x^2 - \ln x}{x}$, $x>0$

Γ2 Είναι $f'(x) = 1 - \dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$, $x>0$.

Θεωρώ $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$, $x>0$.

Η $g(x)=0$ έχει προφανή λύση την $x=1$, αφού $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$.

Όμως $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$ για κάθε $x>0$.

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς η $g(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.

Άρα και η $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{x^2} = 0$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

(αφού για $x = e > 1$ είναι $f'(e) = 1 > 0$
και για $x = \frac{1}{e} < 1$ είναι $f'(\frac{1}{e}) = -2e^2 < 0$)

Η f είναι γν. φθίνουσα για κάθε $x \in (0,1]$
ενώ η f είναι γν. αύξουσα για κάθε $x \in [1,+\infty)$.
Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, ίσο με $f(1)=1$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x - \frac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x - \ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = +\infty$

ενώ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{D.H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$

Επειδή f γν. φθίνουσα για κάθε $x \in (0,1]$ είναι

$f((0,1]) = [f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)) = [1,+\infty)$

Επειδή f γν. αύξουσα για κάθε $x \in [1,+\infty)$ είναι

$f([1,+\infty)) = [f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)) = [1,+\infty)$

Άρα $f(A) = f((0,1]) \cup f([1,+\infty)) = [1,+\infty)$

Γ3 Για κάθε $x>0$ είναι (από Γ2)

$$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - \ln x}{x} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - \ln x \geq x \Leftrightarrow$$

$$\ln x \leq x^2 - x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq x - 1 \Leftrightarrow$$

$$2^{\frac{\ln x}{x}} \leq 2^{x-1} \Leftrightarrow 2^{\frac{\ln x}{x}} - 2^{x-1} \leq 0$$

Άρα $\int_1^2 \left(2^{\frac{\ln x}{x}} - 2^{x-1}\right) dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_1^2 2^{\frac{\ln x}{x}} dx \leq \int_1^2 2^{x-1} dx =$

$$= \left[\frac{2^{x-1}}{\ln 2}\right]_1^2 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

Επομένως $\int_1^2 2^{\frac{\ln x}{x}} dx \leq \frac{1}{\ln 2}$.

Γ4 Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{D.H.}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \frac{\ln x}{x} - x\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\right) \overset{D.H.}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Επομένως η $\varepsilon: y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f καθώς $x \to +\infty$.

$f(x) = x \Leftrightarrow x - \frac{\ln x}{x} = x \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Επειδή $x \geq x - \frac{\ln x}{x}$ για κάθε $x > 1$ είναι:

$$E = \int_1^e (x - f(x))\,dx = \int_1^e \left(x - x + \frac{\ln x}{x}\right) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx =$$

$$= \int_1^e (\ln x)' \cdot \ln x\,dx = \left[\ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx \Longleftrightarrow$$

$2E = 1^2 - 0 \Leftrightarrow E = \frac{1}{2}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 i) Είναι $x \cdot e^x > 0$ για κάθε $x > 0$, ενώ $x \cdot e^x < 0$ για κάθε $x < 0$. Επίσης η $x \cdot e^x = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Άρα $\int_0^{f(1)} x \cdot e^x\,dx = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0.$

ii) Είναι $f(e^{f'(x)}) + \ln x + \ln(f'(x)) = f(e^{\frac{1}{x}}) \Leftrightarrow$

$$f(e^{f'(x)}) + \ln(f'(x)) = f(e^{\frac{1}{x}}) - \ln x. \quad (*)$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(t) = f(e^t) + \ln t$, $t > 0$

Οπότε $(*) \Leftrightarrow g(f'(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right).$

Όμως $g'(t) = f'(e^t)\cdot e^t + \frac{1}{t} > 0$ διότι

$t>0$ και $x\cdot f'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>0$ αφού $x>0$

Άρα και $f'(e^t)>0$. Οπότε η g είναι γν. αύξουσα και συνεπώς "1-1".

Επομένως από την $g(f'(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ προκύπτει

$f'(x) = \frac{1}{x}$ δηλ. $f(x) = \ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Όμως $f(1)=0$, οπότε για $x=1$, $f(1) = \ln 1 + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c=0$. Άρα $f(x) = \ln x$, $x>0$.

Δ2 * Προφανώς στην εκφώνηση εννοεί το εμβαδόν μεταξύ C_f, $x'x$, $x=k$, $x=k^2$.

Για κάθε $x>e$ είναι $\ln x > 0$ δηλ. $f(x)>0$.

Άρα $E = \int_k^{k^2} f(x)\,dx = \int_k^{k^2} \ln x\,dx = \left[x\cdot\ln x\right]_k^{k^2} - \left[x\right]_k^{k^2} =$

$= k^2\cdot\ln k^2 - k\cdot\ln k - k^2 + k = (2k^2-k)\cdot\ln k - k^2 + k$ τ.μ.

Θεωρώ $h(\ ) = (2k^2-k)\cdot\ln k - k^2 + k$, $k>e$

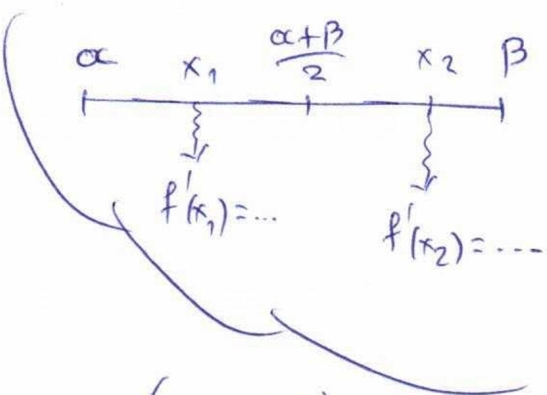
Η $h(k) = 15\cdot\ln 3 - 6$ έχει προφανή λύση την $k=3$ αφού $h(3) = 15\cdot\ln 3 - 6$.

Όμως $h'(k) = (4k-1)\cdot \ln k + (2k^2-k)\cdot \frac{1}{k} - 2k+1 =$

$= (4k-1)\cdot \ln k > 0$ για κάθε $k > e$.

Άρα η h γν. αύξουσα για κάθε $k>e$, οπότε η $h(k) = 15\cdot \ln 3 - 6$ έχει μοναδική λύση την $k=3$.

Δ3



Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και παρ/μη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Άρα, λόγω Θ.Μ.Τ., υπάρχει ένα τουλ. $x_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ ώστε:

$$f'(x_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{\ln\frac{\alpha+\beta}{2} - \ln\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (1)$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και παρ/μη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

Άρα, λόγω Θ.Μ.Τ., υπάρχει ένα τουλ. $x_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{x_2} = \frac{\ln\beta - \ln\frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (2)$$

Από την ① έχουμε $\frac{\beta-a}{2}=x_1\cdot \ln\frac{a+\beta}{2}-x_1\cdot \ln a$

ενώ από την ② $\frac{\beta-a}{2}=x_2\cdot \ln\beta-x_2\ln\frac{a+\beta}{2}$

Επομένως $x_1\ln\frac{a+\beta}{2}-x_1\cdot\ln a=x_2\ln\beta-x_2\ln\frac{a+\beta}{2}\Leftrightarrow$

$$(x_1+x_2)\cdot\ln\frac{a+\beta}{2}=x_1\cdot\ln a+x_2\ln\beta\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{a+\beta}{2}\right)^{x_1+x_2}=x_1\cdot\ln a+x_2\cdot\ln\beta\Leftrightarrow$$

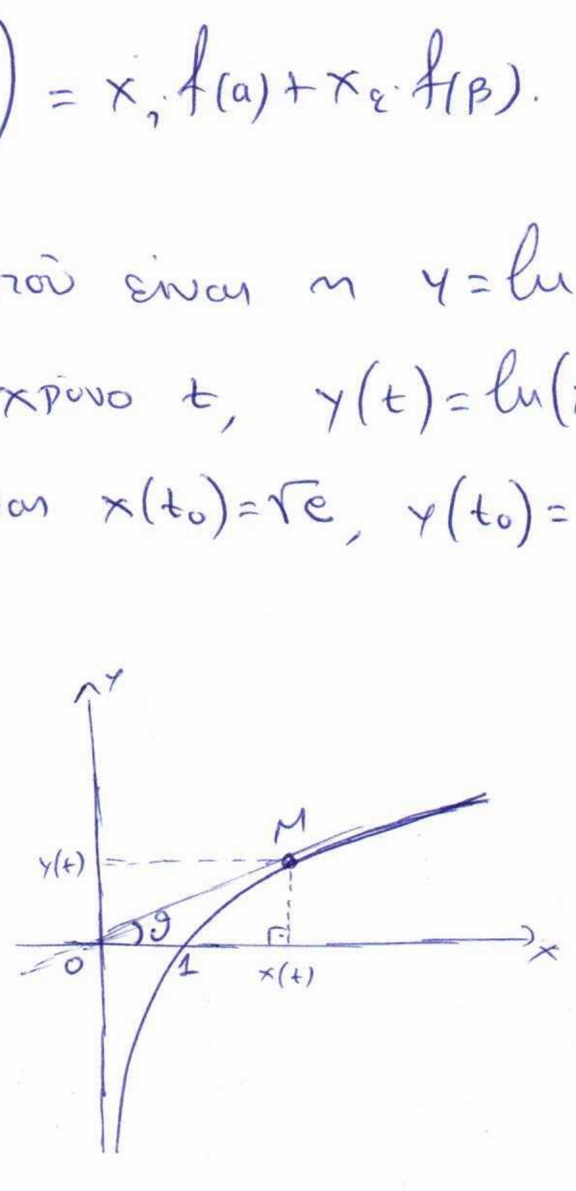
$$f\left(\left(\frac{a+\beta}{2}\right)^{x_1+x_2}\right)=x_1\cdot f(a)+x_2\cdot f(\beta).$$

Δ4 Η τροχιά του κινητού είναι η $y=\ln x$ και σε συνάρτηση με το χρόνο t, $y(t)=\ln(x(t))$.

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x(t_0)=\sqrt{e}$, $y(t_0)=\frac{1}{2}$ και $x'(t_0)=-2$ μον./sec.

Είναι $\varepsilon\varphi\vartheta=\frac{y}{x}$ δηλ.

$$\varepsilon\varphi(\vartheta(t))=\frac{y(t)}{x(t)}$$



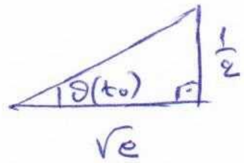
Οπότε $$\frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2(\theta(t))} = \frac{y'(t)x(t)-y(t)\cdot x'(t)}{x^2(t)}$$

Για $t=t_0$, $$\frac{\theta'(t_0)}{\sigma\upsilon\nu^2(\theta(t_0))} = \frac{y'(t_0)x(t_0)-y(t_0)\cdot x'(t_0)}{(x(t_0))^2}$$

Άρα $$\frac{\theta'(t_0)}{\frac{e}{e+\frac{1}{4}}} = \frac{-\frac{2}{\cancel{\sqrt{e}}}\cdot\cancel{\sqrt{e}}-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(-\cancel{2})}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta'(t_0) = \frac{-1}{e+\frac{1}{4}} \text{ rad/sec.}$$

$t=t_0$



$$\sigma\upsilon\nu\theta(t_0) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e+\frac{1}{4}}}$$

$y=\ln x$

$y(t)=\ln(x(t))$

$y'(t)=\frac{x'(t)}{x(t)}$

Για $t=t_0$, $y'(t_0)=\frac{x'(t_0)}{x(t_0)} \Leftrightarrow$

$y'(t_0)=\frac{-2}{\sqrt{e}}$

Τις λύσεις επιμελήθηκε
ο μαθηματικός
Παπαοικονόμου Θανάσης