ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 9/5/2016 ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

<u>επιμέλεια : Χρονόπουλος Τάκης</u> (5η έκδοση)

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. Σ-Λ-Σ-Σ

ΘΕΜΑ 2ο

A. Η ευθεία $y=9x-10$ είναι εφαπτομένη στο $\mathrm{A}(2,f(2))\Rightarrow\begin{cases} f'(2)=9 \\ f(2)=9\cdot 2-10=8\end{cases}$

κι επειδή $\begin{cases} f'(2)=3\cdot 2^2+\beta \\ f(2)=2^3+2\beta+\gamma\end{cases}\Rightarrow(\beta,\gamma)=(-3,6)\Rightarrow f(x)=x^3-3x+6,\ x\in[1,+\infty)$.

$$g^2(x)+25=e^{2-2x}+10g(x)\Leftrightarrow g^2(x)-10g(x)+25=e^{2-2x}\Leftrightarrow\left(g(x)-5\right)^2=\left(e^{1-x}\right)^2$$

Θέτω $H(\mathrm{x})=g(x)-5,\ x\in(-\infty,1)$, συνεχής ως πράξεις συνεχών

$H^2(x)=\left(e^{1-x}\right)^2>0\Rightarrow H(x)\neq 0\Rightarrow H(x)$ διατηρεί πρόσημο

Κι επειδή $H(0)=g(0)-5=5-e-5=-e<0\Rightarrow H(\mathrm{x})<0\ ,x\in(-\infty,1)$

$$H(x)=-e^{1-x}\Leftrightarrow g(x)-5=-e^{1-x}\Leftrightarrow g(x)=5-e^{1-x}\Rightarrow f(x)=5-e^{1-x},x\in(-\infty,1)$$

B. i) Για $x\neq 1$, η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Για $x=1$, η f είναι συνεχής διότι $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\mathrm{f}(1)=4$.

B. ii) Για $x\neq 1$, η f είναι συνεχής ως πράξεις παραγωγίσιμων με παράγωγο:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-3>0, & x\in(1,+\infty)\\ e^{1-x}>0, & x\in(-\infty,1)\end{cases}$$

x	-∞	1	+∞
f '(x)		‖	+
f '(x)	+	‖	
f(x)	↗		

$f\nearrow R\Rightarrow$ δεν παρουσιάζει ακρότατα

iii) <u>α’ τρόπος (προφανή ρίζα και 1-1)</u>

$f \nearrow R \Rightarrow f\ 1-1\ R$

$f(x)=4 \overset{f(1)=4}{\Leftrightarrow} f(x)=f(1) \overset{f\,1-1\,R}{\Leftrightarrow} x=1$, μοναδική λύση

<u>β’ τρόπος (σύνολο τιμών)</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x+6\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(5-e^{1-x}\right)\overset{y=1-x}{=}\lim_{y\to+\infty}\left(5-e^{y}\right)=5-(+\infty)=-\infty$$

f συνεχής και $\nearrow R \Rightarrow f(R)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R$

$4\in f(R)\Rightarrow \exists\, x_1\in R: \mathrm{f}(x_1)=4$ κι επειδή $f\nearrow R$, η ρίζα αυτή x_1 είναι μοναδική.

<u>γ’ τρόπος (επίλυση εξίσωσης ανά κλάδο)</u>

$$f(x)=4\Leftrightarrow\begin{cases} x^3-3x+6=4,\ x\in[1,+\infty)\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\overset{x\geq 1}{\Leftrightarrow}x=1,\text{δεκτή}\\ \text{ή}\\ 5-e^{1-x}=4,\quad x\in(-\infty,1)\Leftrightarrow e^{1-x}=1\Leftrightarrow x=1,\text{απορρίπτεται για } x<1\end{cases}$$

άρα $x=1$, μοναδική λύση

Γ. $h(x)=\dfrac{x}{4-f(x)},\ \ D_h=\{x\in R, 4-f(x)\neq 0\}=R-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$$\lim_{x\to1^-}h(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x}{4-5+e^{1-x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{x}{e^{1-x}-1}=+\infty,\ \text{διότι}\ e^{1-x}-1>0\Leftrightarrow e^{1-x}>1\Leftrightarrow 1-x>0$$

Άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=1$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\left(e^{1-x}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{1-x}-1}=0=\lambda_1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(h(x)-\lambda_1x\right)\overset{\lambda_1=0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{1-x}-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{1-x}}=0=\beta_1\Rightarrow$$

οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ $(y=0x+0)$ στο $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(4-x^3+3x-6\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-x^3+3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-x^3}=0=\lambda_2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)-\lambda_2 x\right)\overset{\lambda_2=0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x^3+3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x^2}=0=\beta_2\Rightarrow$$

οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ $(y=0x+0)$ στο $+\infty$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. i) $f(x)=\ln x-x\ ,x>0\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}=\begin{cases}>0\Leftrightarrow x<1\\>0\Leftrightarrow x=1\\<0\Leftrightarrow x>1\end{cases}$

x	0		1		+∞
f '(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖	↗	ΟΜ f(1)	↘	

$f\nearrow(0,1],\ f\searrow[1,+\infty)$

ολικό μέγιστο $f(1)=-1$

$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $(0,+\infty)$

Α. ii) $xe^{-x-\lambda}-1=0\Leftrightarrow xe^{-x-\lambda}=1\Leftrightarrow x=e^{x+\lambda}\Leftrightarrow \ln x=\ln e^{x+\lambda}$

$\Leftrightarrow \ln x=x+\lambda\Leftrightarrow \ln x-x=\lambda\Leftrightarrow f(x)=\lambda$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(\ln x-x)=-\infty-0=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln x-x)=\lim_{x\to+\infty}\ln x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)=+\infty(0-1)=-\infty$$

$$\delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

<u>αλλιώς για το παραπάνω όριο</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln x-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\ln e^{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{e^{x}}\overset{y=\frac{x}{e^x}}{=}\lim_{x\to0^{+}}\ln y=-\infty$$

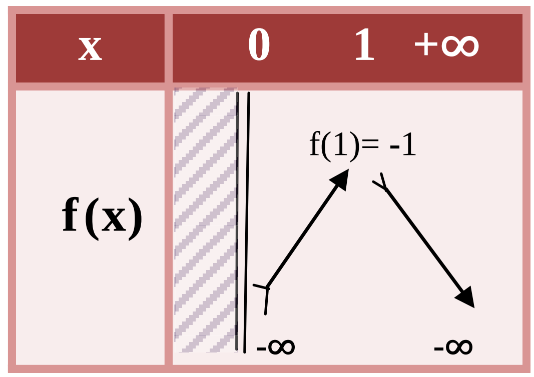
$$\textit{διότι}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$$

f συνεχής και $\nearrow \Delta_1=(0,1)$, $\searrow \Delta_2=(1,+\infty)\Rightarrow$

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to0^{+}} f(x),\lim_{x\to1^{-}} f(x)\right)=(-\infty,-1)$$

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\lim_{x\to1^{+}} f(x)\right)=(-\infty,-1)$$

$$f(1)=-1=\lim_{x\to1^{-}} f(x)=\lim_{x\to1^{+}} f(x),$$



οπότε $f\left((0,+\infty)\right)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup\{-1\}=(-\infty,-1]$

Για $\lambda>-1$: η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη διότι $\lambda\notin f\left((0,+\infty)\right)$

Για $\lambda=-1$: η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική λύση, την $x=1$, διότι

$-1\notin f(\Delta_1),-1\notin f(\Delta_2), f(1)=-1$διότι $\lambda\notin f\left((0,+\infty)\right)$

Για $\lambda<-1$: η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις τις $x_1\in\Delta_1, x_2\in\Delta_2$

, διότι $-1\in f(\Delta_1),-1\in f(\Delta_2), f(1)=-1\neq\lambda$ και f γνησίως

μονότονη σε καθένα από τα ξένα Δ_1,Δ_2

Β . i) $g(x)+g^3(x)=f(x)+3\ (1)$

<u>α' τρόπος (άτοπο από γνησίως φθίνουσα)</u>

Έστω g όχι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

$$\Rightarrow \exists\ x_1,x_2 \in [1,+\infty)\ \mu\varepsilon\ x_1<x_2\ \kappa\alpha\iota\ g(x_1)\le g(x_2) \Rightarrow$$

$$\underline{g^3(x_1)\le g^3(x_2)\ \oplus}$$

$$g(x_1)+g^3(x_1)\le g(x_2)+g^3(x_2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_1)+3\le f(x_2)+3$$

$$\Leftrightarrow f(x_1)\le f(x_2) \overset{f\searrow[1,+\infty)}{\Leftrightarrow} x_1>x_2,\ \acute{\alpha}\tau o\pi o\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ x_1<x_2 \text{ άρα } g \searrow [1,+\infty)$$

<u>β' τρόπος (με μονοτονία σύνθετης συνάρτησης)</u>

$$g(x)+g^3(x)=f(x)+3 \Leftrightarrow g(x)+g^3(x)-3=f(x)\ (1)$$

θέτω $\mathrm{K}(x)=x+x^3-3,\ x\in R$, οπότε $(1)\Leftrightarrow K(g(x))=f(x)\ (2)$

$$\mathrm{K}'(x)=3x^2+1>0 \Rightarrow K \nearrow R$$

Έστω $x_1,x_2\in[1,+\infty)\ \mu\varepsilon\ x_1<x_2 \overset{f\searrow[1,+\infty)}{\Rightarrow} f(x_1)>f(x_2)$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} K(g(x_1))>K(g(x_2)) \overset{K\nearrow R}{\Rightarrow} g(x_1)>g(x_2) \text{ άρα } g \searrow [1,+\infty)$$

Β . ii) $g(\ln\beta-\ln\alpha)-g(\beta-\alpha)>0 \Leftrightarrow g(\ln\beta-\ln\alpha)>g(\beta-\alpha)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(\ln\beta-\ln\alpha)>g(\beta-\alpha) \overset{g\searrow[1,+\infty)}{\Rightarrow} \ln\beta-\ln\alpha<\beta-\alpha\ (3) \\ \ln\beta-\ln\alpha\in[1,+\infty) \Leftrightarrow \ln\beta-\ln\alpha\ge 1 \Leftrightarrow \ln\dfrac{\beta}{\alpha}\ge \ln e,\ \pi o\upsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota \\ \beta-\alpha\in[1,+\infty) \Leftrightarrow \beta-\alpha\ge 1,\ \pi o\upsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota \end{cases}$$

$$(3)\Leftrightarrow \ln\beta-\beta>\ln\alpha-\alpha \Leftrightarrow f(\beta)>f(\alpha),\ \pi o\upsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ f\searrow[1,+\infty)$$

<u>αλλιώς για την ανισότητα (3)</u>

$$\ln\beta-\ln\alpha<\beta-\alpha \overset{\beta-\alpha>1}{\Leftrightarrow} \frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<1\,(4)$$

ΘΜΤ για την $\mathrm{M}(x)=\ln x$ στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha>1$

$$\Rightarrow \exists\xi\in[\alpha,\beta]: f^{'}(\xi)=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\xi}$$

$$(4)\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}<1\Leftrightarrow\xi>1, \text{που ισχύει διότι } 1<\alpha<\xi<\beta$$

Γ. i) $g\searrow[1,+\infty)\Rightarrow g\ 1-1\,[1,+\infty)\Rightarrow g$ αντιστρέφεται στο $[1,+\infty)$.

Γ. ii) $g(x)+g^3(x)=\ln x-x+3 \overset{x=1}{\Rightarrow} g(1)+g^3(1)=2 \overset{Horner}{\Rightarrow} g(1)=1\Rightarrow g^{-1}(1)=1$

$$\lim_{x\to1}\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g^{-1}(x)-1}{x-1}\underset{x=g(y)}{\overset{g^{-1}(x)=y}{=}}\lim_{y\to1}\frac{y-1}{g(y)-g(1)}$$

$$g(x)+g^3(x)=\ln x-x+3\Rightarrow\left(g(x)+g^3(x)\right)'=\left(\ln x-x+3\right)'$$

$$\Leftrightarrow g'(x)+3g^2(x)g'(x)=\frac{1}{x}-1\Leftrightarrow g'(x)=\frac{1-x}{x\left(1+3g^2(x)\right)}\,(5)$$

$$\Rightarrow\lim_{y\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=0$$

$$\text{για } x>1 \overset{g\searrow[1,+\infty)}{\Rightarrow} g(x)<g(1)\Rightarrow\frac{g(x)-g(1)}{x-1}<0$$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(1)}{x-1}=\lim_{y\to1}\frac{y-1}{g(y)-g(1)}=\lim_{y\to1^+}\frac{1}{\frac{g(y)-g(1)}{y-1}}=-\infty$

αλλιώς για το όριο (μετά την αλλαγή μεταβλητής)

$$\lim_{x\to 1}\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(1)}{x-1}=\lim_{y\to 1^+}\frac{y-1}{g(y)-g(1)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{y\to 1^+}\frac{(y-1)'}{\left(g(y)-g(1)\right)'}=$$

$$=\lim_{y\to 1^+}\frac{1}{g'(y)}\overset{(5)}{=}\lim_{y\to 1^+}\frac{y\left(1+3g^2(y)\right)}{1-y}=\lim_{y\to 1^+}y\left(1+3g^2(y)\right)\frac{1}{1-y}=-\infty$$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. $f(x)\geq f(1)$, Θ.Fermat $\Rightarrow f'(1)=0$

α' τρόπος (εφαρμογή στις συνέπειες ΘΜΤ + τέχνασμα με τα εκθετικά)

$$f''(x)-2f'(x)+f(x)=-1\Leftrightarrow f''(x)-f'(x)=f'(x)-f(x)-1$$

$$\Leftrightarrow\left(f'(x)-f(x)-1\right)'=f'(x)-f(x)-1\ (1)$$

Θέτω $g(x)=f'(x)-f(x)-1,$

είναι $(1)\Leftrightarrow g'(x)=g(x)\Leftrightarrow g(x)=ce^x\Leftrightarrow f'(x)-f(x)-1=ce^x$

Για $x=1$: $f'(1)-f(1)-1=ce\Leftrightarrow 0+e+1-1=ce\Leftrightarrow c=1$

Άρα $f'(x)-f(x)-1=e^x\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=e^x+1\Leftrightarrow$

$$e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)=e^{-x}e^x+e^{-x}1\Leftrightarrow\left(e^{-x}f(x)\right)'=1+e^{-x}\Leftrightarrow\left(e^{-x}f(x)\right)'=\left(x-e^{-x}\right)'$$

$$e^{-x}f(x)=x-e^{-x}+c_2\Leftrightarrow f(x)=xe^x-1+c_2e^x$$

Για $x=1$: $f(1)=e-1+c_2e=-e-1\Leftrightarrow c_2e=-2e\Leftrightarrow c_2=-2$

Άρα $f(x)=xe^x-2e^x-1$

β' τρόπος (τέχνασμα με τα εκθετικά)

$$f''(x)-2f'(x)+f(x)=-1 \Leftrightarrow f''(x)-f'(x)=f'(x)-f(x)-1$$

$$\Leftrightarrow (f'(x)-f(x))'=f'(x)-f(x)-1 \ (2)$$

Θέτω $g(x)=f'(x)-f(x)$,

είναι $(2)\Leftrightarrow g'(x)-g(x)=1 \Leftrightarrow e^{-x}(g'(x)-g(x))=1e^{-x}$

$$\Leftrightarrow (e^{-x}g(x))'=(-e^{-x})' \Leftrightarrow e^{-x}g(x)=-e^{-x}+c \Leftrightarrow g(x)=-1+ce^{x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=-1+ce^{x}$$

Μετά όπως πριν, δηλαδή:

Για $x=1$: $f'(1)-f(1)-1=ce \Leftrightarrow 0+e+1-1=ce \Leftrightarrow c=1$

Άρα $f'(x)-f(x)-1=e^{x} \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=e^{x}+1 \Leftrightarrow$

$$e^{-x}(f'(x)-f(x))=e^{-x}e^{x}+e^{-x}1 \Leftrightarrow (e^{-x}f(x))'=1+e^{-x} \Leftrightarrow (e^{-x}f(x))'=(x-e^{-x})'$$
$$e^{-x}f(x)=x-e^{-x}+c_2 \Leftrightarrow f(x)=xe^{x}-1+c_2e^{x}$$

Για $x=1$: $f(1)=e-1+c_2e=-e-1 \Leftrightarrow c_2e=-2e \Leftrightarrow c_2=-2$

Άρα $f(x)=xe^{x}-2e^{x}-1$

Β. $f'(x)=(xe^{x}-2e^{x}-1)'=(x-1)e^{x}=\begin{cases} >0, & \gamma\iota\alpha\ x>1 \\ =0, & \gamma\iota\alpha\ x=1 \\ <0, & \gamma\iota\alpha\ x<1 \end{cases}$

x	**-∞**	**1**	**+∞**
f '(x)	**-**	**0**	**+**
f(x)	$\searrow$	ΟΕ f(1)	$\nearrow$

$f \nearrow [1,+\infty)$, $f \searrow (-\infty,1]$

ολικό ελάχιστο $f(1)=-e-1$

parmenides51.blogspot.gr

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^x - 2e^x - 1\right) = \lim_{y\to+\infty}\left[(x-2)e^x - 1\right] = 0 - 1 = -1 \quad \delta\iota\acute{o}\tau\iota$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x-2)e^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)'}{\left(e^{-x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -e^x = 0$$

<u>αλλιώς για το παραπάνω όριο</u>

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^x - 2e^x - 1\right) \overset{y=-x}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(-ye^{-y} - 2e^{-y} - 1\right) =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} -\left(\frac{y+2}{e^y} + 1\right) = -(0+1) = -1$$

$$\delta\iota\acute{o}\tau\iota \quad \lim_{y\to+\infty}\frac{y+2}{e^y} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^x - 2e^x - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[(x-2)e^x - 1\right] = (+\infty - 2)(+\infty) - 1 = +\infty$$

$$f(1) = -e - 1 = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x)$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	-1 ↘	f(1)= -e-1	↗ $+\infty$

f συνεχής και $\searrow \Delta_1 = (-\infty, 1], \nearrow \Delta_2 = [1, +\infty) \Rightarrow$

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to1^-} f(x)\right) = (-1, -\mathrm{e}-1)$$

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to1^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-e-1, +\infty)$$

$f(1) = -e-1$, οπότε $f(R) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \bigcup \{-e-1\} = (-e-1, +\infty)$

$0 \notin f(\Delta_1) \Rightarrow$ η f δεν έχει ρίζα στο Δ_1 , $\quad 0 \neq f(1)$

$0 \in f(\Delta_2) \Rightarrow \exists\ x_1 \in \Delta_2 : f(x_1) = 0$ κι επειδή $f \nearrow \Delta_2$, είναι μοναδικό

Από θεώρημα Bolzano στο (2,3) υπάρχει $\rho \in (2,3) : \mathrm{f}(\rho) = 0$

Κι επειδή $(2,3) \subseteq \Delta_2 \Rightarrow$ η ρίζα ρ θα είναι η μοναδική ρίζα της f , δηλ. $\rho \equiv x_1$

Γ. <u>α΄ τρόπος για το (i)</u>

$f \nearrow [2,3]: \gamma\iota\alpha\ \ 2 < x_1 < x_2 < 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Οπότε εφόσον μειώνεται η τετμημένη του, θα μειώνεται και η τεταγμένη του.

<u>α΄ τρόπος για το (ii)</u>

Έστω t_o η χρονική στιγμή που το σώμα βρίσκεται στο σημείο $\mathrm{A}(\rho,0)$

$\Rightarrow x(t_o) = \rho\ ,\ f(x(t_o)) = 0\ \ ,x'(t_o) = -3$

$f(x(t)) = x(t)e^{x(t)} - 2e^{x(t)} - 1 \Rightarrow f'(x(t))x'(t) = x'(t)e^{x(t)} + x(t)e^{x(t)} - 2x'(t)e^{x(t)}$

για $t = t_o$: $f'(x(t_o))x'(t_o) = x'(t_o)e^{x(t_o)} + x(t_o)e^{x(t_o)} - 2x'(t_o)e^{x(t_o)}$

$\Leftrightarrow f'(\rho)(-3) = -3e^{\rho} + \rho e^{\rho} - 2(-3)e^{\rho} \Leftrightarrow f'(\rho) = -\dfrac{e^{\rho}(3+\rho)}{3}$

<u>β΄ τρόπος για το (ii)</u>

Από κανόνα αλυσίδας $\dfrac{df(x)}{dt} = \dfrac{df(x)}{dx}\dfrac{dx}{dt} = f'(x)x'(t)$

Την χρονική στιγμή που το σώμα βρίσκεται στο σημείο $\mathrm{A}(\rho,0)$

$\Rightarrow x = \rho\ ,\ f(\rho) = 0\ \ ,x'(t) = \dfrac{dx}{dt} = -3$

$f(x) = xe^x - 2e^x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x + xe^x - 2e^x = xe^x - e^x \Rightarrow f'(\rho) = \rho e^{\rho} - e^{\rho}$

Οπότε $\left.\dfrac{df(x)}{dt}\right|_{x=\rho} = f'(\rho)\cdot\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=\rho} = f'(\rho) = -3(\rho e^{\rho} - e^{\rho}) = -3(\rho-1)e^{\rho}$

<u>β΄ τρόπος για το (i)</u>

εφόσον $f'(\rho) = -\dfrac{e^{\rho}(3+\rho)}{3} < 0 \Rightarrow$ μειώνεται και η τεταγμένη του ή

εφόσον $f'(\rho) = -3(\rho-1)e^{\rho} < 0$ διότι $2 < \rho < 3 \Rightarrow$ μειώνεται και η τεταγμένη του

Δ. $\int_{\rho}^{2} f(t)dt \cdot \int_{\rho}^{3} f(t)dt > f''(x) - 2f'(x) + f(x) + 1 \Leftrightarrow \int_{\rho}^{2} f(t)dt \cdot \int_{\rho}^{3} f(t)dt > 0$

διότι $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = -1$

x	2 ρ 3
f(x)	- ↗ 0 ↗ +
f(x)	- 0 +

$$f \nearrow [2,\rho]: \text{για } \ 2 < x < \rho \Rightarrow f(x) < f(\rho) = 0 \Rightarrow \int_{2}^{\rho} f(t)dt < 0 \Rightarrow \int_{r}^{2} f(t)dt > 0$$

$$f \nearrow [\rho,3]: \text{για } \ \rho < x < 3 \Rightarrow 0 = f(\rho) < f(x) \Rightarrow \int_{\rho}^{3} f(t)dt > 0$$

Πολλαπλασιάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει το ζητούμενο.

Υ.Γ. Το παρόν αρχείο ονομάζεται υποδείξεις γιατί δεν είναι πλήρεις όλες οι αιτιολογήσεις.