ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤ & ΤΕΧΝ/ΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ)
ΤΑΞΗ: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ : ΑΝΑΛΥΣΗ §1.1 - §1.7 ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 3 ΩΡΕΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ..
ΤΜΗΜΑ........ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ....
ΣΧΟΛΙΑ ....
..
..

ΒΑΘΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x_1 + \alpha_0$. Να αποδείξετε ότι το $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Α2. Να ελέγξετε αν είναι Σωστή ή Λανθασμένη καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη Σωστή ή Λανθασμένη δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν Α και Β τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού A_1 της συνάρτησης $g \circ f$ είναι το $A_1 = \{x \,/\, x \in A \text{ και } f(x) \in B\}$.
2. Αν μία συνάρτηση f είναι 1 – 1 τότε κατ' ανάγκη είναι γνησίως μονότονη.
3. Αν μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε θα είναι κατ' ανάγκη και 1 – 1.
4. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} βρίσκονται πάντα πάνω στην ευθεία ψ = x.
5. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
6. Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x > 0$.
7. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε η $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.
8. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν και τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
9. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, τότε θα ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$.
10. Αν 0 < α < 1, τότε $\lim\limits_{x \to 0} (\log_\alpha x) = +\infty$.

Μονάδες: 5 + 20 = 25

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα Α(1, 3) και Β(-1, 4).

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα καθώς και ότι είναι αντιστρέψιμη.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(5 - f^{-1}(3\ln x)\right) = e^{\ln f^{-1}(4)}$.

Β2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3\ln x + 5}{4}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

β. Να αποδείξετε ότι αν $g(x) = 1 - \ln x$, τότε $\left(f^{-1} \circ g\right)(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{ex^4}}$.

Μονάδες : (5 + 5) + (10 + 5) = 25

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+(\beta-1)x+4}{x^2-4x+4}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\in\mathbb{R}$.

Γ2. Να υπολογίσετε τα όρια **i.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ και **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\lambda-1)x^3-(\lambda-\mu)x^2+\mu x-3}{x+1}$.Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ για τις διάφορες τιμές των $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=3$.

Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot f(x)-x^2+\eta\mu x-\lambda x}{f(x)+\lambda x-x}=4$, να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

Γ5. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-\sqrt{4x^2+1}+3f(x)\right]=6$.

Μονάδες: 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+\ln x-1$.

α. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

γ. Να λύσετε την: **i.** Την εξίσωση $f^{-1}(\ln x)=x$.

ii. Την ανίσωση $\ln\dfrac{3x^2+1}{x^2+3}>e^{x^2+2}-e^{3x^2}$.

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(f^2(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)$.

Δ2. Αν για μία συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\le-\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

[4 + 2 + (2 + 5) + 6] + 6 = 25