

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2021 (THE YEAR OF KORONA VIRUS)

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 07**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 04**

**A3.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 02**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη (1 μονάδα) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (3 μονάδες).

**α.** Έστω ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο σύνολο  $A = (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  και

$f'(x) = 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $A$ , τότε η  $f$  είναι σταθερή στο  $A$ .

**β.** Αν  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

**γ.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ , τότε ισχύει πάντα  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ .

**Μονάδες 12**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{2}{x} - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  και  $g(x) = 3 \ln x$ ,  $x > 0$ .

**B1. α.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $w = g \circ f$ .

**Μονάδες 05**

Έστω  $w(x) = 3 \ln \left( \frac{2}{x} - 2 \right)$ ,  $x \in (0, 1)$ .

**β. i)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $w$ .

**Μονάδες 04**

**ii)** Να λύσετε την εξίσωση  $w(x) = 0$

**Μονάδες 02**

**B2. α.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = g - f$  και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

**Μονάδες 05**

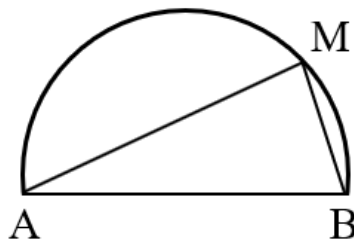
**β.** Να αποδείξετε ότι η  $h$  είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της  $h$  στο σημείο της  $M(1, h(1))$ .

**Μονάδες 04**

**γ.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:  $3x \cdot \ln x \leq 5x^2 - 7x + 2$ .

**Μονάδες 05**

### **ΘΕΜΑ Γ**



Σε ημικύκλιο διαμέτρου  $AB = 10\text{cm}$  θεωρούμε σημείο  $M$  διαφορετικό από τα  $A$  και  $B$  και τις ευθύγραμμες αποστάσεις  $AM = x$  και  $MB = y$ . Ένα υλικό σημείο ξεκινά από το  $A$  και κινούμενο ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα  $0,3\text{cm/sec}$  φτάνει στο  $M$  σε χρόνο  $t_1$ . Κατόπιν ξεκινά από το  $M$  και κινούμενο ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα  $0,4\text{cm/sec}$  φτάνει στο  $B$  σε χρόνο  $t_2$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των χρόνων  $t_1 + t_2$  ως συνάρτηση του  $x$  είναι

$$T(x) = \frac{x}{0,3} + \frac{\sqrt{100-x^2}}{0,4} \text{ με } x \in (0,10).$$

**Μονάδες 08**

**Γ2.** Να βρείτε το  $x$  ώστε το άθροισμα των χρόνων  $t_1 + t_2$  να μεγιστοποιείται. Ποιο είναι το μέγιστο άθροισμα των χρόνων;

**Μονάδες 08**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των χρόνων  $t_1 + t_2$  γίνεται 35 δευτερόλεπτα δυο φορές κατά τη διάρκεια της κίνησης, ανάλογα με τη θέση του  $M$  επάνω στο ημικύκλιο.

**Μονάδες 09**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f'(x) = ke^{-x} - xe^{-x}$ ,

$k \in \mathbb{R}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και η γραφική της παράσταση στο σημείο της  $A\left(1, \frac{1}{e}\right)$  δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

**Δ1.** Να βρείτε τον αριθμό  $k$  και τον τύπο της  $f$ .

**Μονάδες 08**

Για τα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι  $f(x) = x \cdot e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

**Μονάδες 08**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .

**Μονάδες 03**

**Δ4.** Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  και να χαράξετε τη γραφική της παράστασης.

**Μονάδες 06**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ στις πανελλαδικές  
εξετάσεις!**