Όνομα:……………………………………………………….…… **ΒΑΘΜΟΣ**:……….

Διάρκεια: **3**ώρες Ημερομηνία: ……/……/……….

ΘΕΜΑ Α

Α$_1$. ☞Έστω f, g δύο συναρτήσεις, με πεδίο ορισμού A, B και $f(A)\cap B\neq\varnothing$
Να ορίσετε τη σύνθεση της f με την g (5Μ)

Α$_2$. 🕮 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (5Μ)

Α$_3$. Απαντήστε με ένα **Σ**ωστό ή **Λ**άθος. (10Μ)

α ☐ Ισχύει $|\eta\mu x|<|x|$, για κάθε $x\in R-\{0\}$

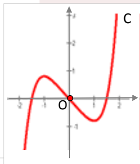
β ☐ Αν καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο τα $f(x)$ αυξάνονται επίσης απεριόριστα, είναι βέβαιο ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

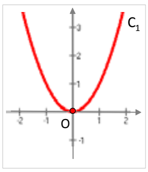
γ ☐ Έστω η συνάρτηση $f: R\to R$
Αν η f δεν είναι συνεχής, τότε σίγουρα δεν είναι παραγωγίσιμη.

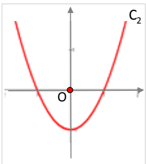
δ ☐ Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_o
τότε και το άθροισμα $f+g$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_o
και ισχύει πάντοτε $\big((f+g)(x_o)\big)'=f'(x_o)+g'(x_o)$

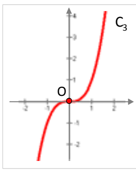
ε ☐ Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R
και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
στο οποίο η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

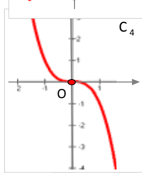
Α$_4$. ✔ Έστω η συνάρτηση $f: R\to R$
Η γραφική παράσταση της f είναι διπλανή γραμμή C
Μία από τις παρακάτω
είναι η γραφική παράσταση της f' και μία της f''











Να επιλέξετε ποια είναι γραφική παράσταση της f' και ποια είναι της f'' (5Μ)

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ και $f_2(x)=e^x$, $x\in R$

B₁. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση f των f_2, f_1 είναι η $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, $x\in R$ (5Μ)

B₂. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$ (3Μ)

B₃. α. Να αποδείξετε ότι $f(R)=(-1,1)$. (5Μ)

β. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=\ln\sqrt{1+x}-\ln\sqrt{1-x}$, $x\in(-1,1)$ (6Μ)

B₄. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\sqrt{1+f(x)}-\ln\sqrt{1-f(x)}=2x$ (6Μ)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+\alpha x-2$, $x\in R$ και α πραγματική παράμετρος.
Η καμπύλη C της f δέχεται μοναδική εφαπτομένη ευθεία (ε) παράλληλη στην ευθεία $(\delta): y=x$ και έστω M το σημείο επαφής.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $M(0,-2)$ που είναι σημείο καμπής της C_f (7Μ)

Γ₂. Να παραστήσετε την f στο επίπεδο. (6Μ)

Γ₃. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(f'(x))^5-1}{f(x)+2}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(f'(x))^5-1}{x^{15}f(x)+2}\right)$ (8Μ)

Γ₄. Να βρείτε τον $\kappa\in Z$, ώστε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ να έχει μία ρίζα στο $(0,1)$ (4Μ)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f ώστε
- $f''(x)<0$, $x\in R$
- $f(1)=1$
- $f'(1)=2$

και
- $f(2)=1$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός x_o και μάλιστα είναι στο $(1,2)$ στο οποίο η f παρουσιάζει μέγιστο. (5Μ)

Δ₂. Να αποδείξετε ότι ο μοναδικός x, ώστε $f'(f(x)+1)=f'(2x)$ είναι ο $x=1$ (4Μ)

Δ₃. Να αποδείξετε ότι $f(x)<3$ (3Μ)

Δ₄. Να αποδείξετε ότι **α.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ (4Μ)

β. ότι η f έχει μόνο δύο ρίζες, τις $\rho_1<1$, $\rho_2>2$ (3Μ)

Δ₅. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(x,f(x))$ της γραφικής παράστασης C_f που απέχει από το σημείο $N(0,3)$ την πιο μικρή απόσταση. (6Μ)

Καλή επιτυχία !