

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**Γ' Γενικού Λυκείου**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να διατυπώσετε (μονάδες 3) και να αποδείξετε (μονάδες 7) το θεώρημα Fermat.

**Μονάδες 10**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

**Μονάδες 3**

**A3.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση της παρακάτω πρότασης

Το όριο  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$  ισούται με

**α.**  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**β.**  $\frac{4}{3}$

**γ.**  $\sqrt{3}$

**δ.**  $\frac{3}{4}$

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό** (Σ), αν είναι σωστή, ή με **Λάθος** (Λ), αν είναι λανθασμένη:

**α.** Αν μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  το πολύ σε ένα σημείο.

**β.** Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$ .

**γ.** Η συνάρτηση  $f(x) = \sin x$  με  $x \in \mathbb{R}$  έχει μία μόνο θέση ολικού ελαχίστου.

**δ.**  $(\eta\mu x)' = -\sin x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 8**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 + 3x + \beta$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα  $x'x$  στο σημείο με τετμημένη 1.

**B1.** Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών  $\alpha, \beta$ .

Μονάδες 6

Δίνονται  $\alpha = -1$  και  $\beta = -2$ .

**B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

**B3.** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$ , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 7

**B4.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{f'(x) - 3}$

Μονάδες 6

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε:

$$\square \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 - f(0)$$

$$\square f'(0) < f(1) - f(0) \text{ και}$$

$$\square f''(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Γ1.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 0$

**Μονάδες 4**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

Αν  $g(x) = f(x) - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , τότε:

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο (μονάδες 4) και να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{(x^2 + x) \cdot g(x)} \text{ (μονάδες 3)}$$

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση  $(x-2)^2 + y^2 = 2$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $A(0, f(0))$  είναι και εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου (μονάδες 3) και να βρείτε το σημείο επαφής τους  $B$  (μονάδες 1).

**β.** Να αποδείξετε ότι καθώς το κινητό περνάει από το σημείο  $B$ , ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y$  ισούται με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης  $x$ . (μονάδες 4).

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 0 \\ \eta\mu x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο  $A(0, 1)$

(μονάδες 3) και σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{\pi}{4}$ . (μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Δίνονται τα σημεία  $K(2, 0)$ ,  $\Lambda(2, 2)$ ,  $M(4, 2)$  και  $N(4, 0)$

**α.** Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου  $K\Lambda MN$ . (μονάδες 2)

**β.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει και τις δύο διαγώνιες. (μονάδες 4)

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = 0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $-\infty$  (μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η ασύμπτωτη έχει άπειρα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της  $f$ . (μονάδες 4)

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Για  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι

**α.** το σημείο που η γραφική παράσταση της  $f$  παρουσιάζει μέγιστη τιμή πρώτη φορά είναι

το  $B\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ , ενώ το σημείο που παρουσιάζει ελάχιστη τιμή πρώτη φορά είναι το

$\Gamma\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ . (μονάδες 3)

**β.** υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) < \frac{2003}{2021}x_0$  (μονάδες 4)

**Μονάδες 7**