Απαντήσεις τελικού διαγωνίσματος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ' Γενικού Λυκείου

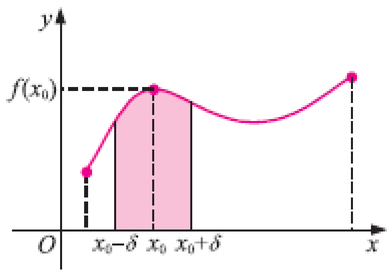
ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα Fermat: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.



Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$ Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \quad (2)$$

— αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Α2. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \le f(x) \le M$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Α3. β. $\frac{4}{3}$

Α4. α. Σωστό

β. Λάθος

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1, οπότε

- $f(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1^3 + 3 \cdot 1 + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha + 3 + \beta = 0$
- $f'(1) = 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο $f'(x) = 3\alpha \cdot x^2 + 3$

Άρα $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha \cdot 1^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\alpha = -3 \Leftrightarrow \alpha = -1$

Για $\alpha = -1$ είναι $-1 + 3 + \beta = 0 \Leftrightarrow 2 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -2$

Β2. Για $\alpha = -1$ και $\beta = -2$, είναι $f(x) = -x^3 + 3x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$.

Είναι: $f'(x) = -3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \quad ή \quad x = 1$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f συνοψίζονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1]$, $A_3 = [1, +\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_2 = [-1, 1]$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=-1$,

$$f(-1)=-(-1)^3+3\cdot(-1)-2=+1-3-2=-4$$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=1$ το

$$f(1)=-1^3+3\cdot 1-2=-1+3-2=0$$

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $f''(x)=\left(-3x^2+3\right)'=-6x$

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow -6x=0 \Leftrightarrow x=0$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow -6x<0 \Leftrightarrow x>0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow -6x>0 \Leftrightarrow x<0$

Το πρόσημο της f'' και η μονοτονία της f' συνοψίζονται στον πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
f'	$\nearrow$		$\searrow$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0]$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=[0,+\infty)$

Η f' παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται μέγιστος για $x=0$

Συνεπώς, το ζητούμενο σημείο το $A(0,f(0))$

Αλλά, $f(0)=-1\cdot 0^3+3\cdot 0-2=-2$

Οπότε $A(0,-2)$

Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{f'(x)-3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\dfrac{1}{f'(x)-3}\right)=+\infty$

γιατί: • $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f'(x)-3\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-3x^2+3-3\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-3x^2\right)=0$

και $f'(x)-3=-3x^2+3-3=-3x^2<0$ για x κοντά στο 0^+

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f'(x)-3}=-\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **<u>Α΄ τρόπος</u>**

Η f είναι συνεχής για x = 0 (αφού είναι παραγωγίσιμη) οπότε είναι:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{f(x)}{x}\right)=0\cdot\left(1-f(0)\right)=0$$

<u>Β΄ τρόπος</u>

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ για x κοντά στο 0 με $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=1-f(0)$, τότε

Τότε: $f(x)=x\cdot h(x)$ για x κοντά στο 0

Η f είναι συνεχής για x = 0 (αφού είναι παραγωγίσιμη) οπότε

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot h(x)\right)=0\cdot\left(1-f(0)\right)=0$$

Είναι: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1-f(0)=1-0=1$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $A(0,f(0))$ είναι: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

άρα: $y-0=1\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=x$

Γ2. Η f συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως παραγωγίσιμη, και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

άρα από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)$$

Αλλά $f'(0)<f(1)-f(0)\Leftrightarrow f'(0)<f'(\xi)$

Είναι $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, συνεχής άρα θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,\xi]$ οπότε από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0, \xi)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = \dfrac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} = \dfrac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi} > 0$

άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συνεπώς η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$g'(x) = f'(x) - 1$ και

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

Είναι για $x < 0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0)$

$\Leftrightarrow f'(x) - 1 < 0$

$\Leftrightarrow g'(x) < 0$

άρα η g γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, 0]$.

Είναι για $x > 0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0)$

$\Leftrightarrow f'(x) - 1 > 0$

$\Leftrightarrow g'(x) > 0$

άρα η g γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [0, +\infty)$.

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x = 0 το $g(0) = f(0) - 0 = 0$

άρα $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{(x^2 + x)\cdot g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x(x+1)g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{g(x)}\right) = +\infty$

γιατί:
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1,$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ και $g(x) > 0$ για x κοντά στο 0

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{g(x)}=+\infty$

Γ4. α. Η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $A(0,f(0))$ είναι: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

και $f(0)=0, f'(0)=1$ *άρα:* $y-0=1\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=x$

Είναι: $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=2\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+x^2=2\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+4+x^2-2=0\\ y=x\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-4x+2=0\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x^2-2x+1)=0\\ y=x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1)^2=0\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$$

Άρα, η ευθεία $y=x$ *και ο κύκλος* $(x-2)^2+y^2=2$ τέμνονται σε ένα σημείο, το $B(1,1)$ οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $A(0,f(0))$ είναι και εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου

β. Έστω $x=x(t)$ *και* $y=y(t)$ οι συντεταγμένες του κινητού, τη χρονική στιγμή t.

Τη χρονική στιγμή t_0 που το κινητό βρίσκεται στη θέση $B(1,1)$ είναι: $x(t_0)=y(t_0)=1$

Το κινητό κινείται στον κύκλο $(x-2)^2+y^2=2$ είναι: $(x(t)-2)^2+y^2(t)=2$

Άρα, $\left(\left(x(t)-2\right)^2\right)'+\left(y^2(t)\right)'=0\Leftrightarrow 2\cdot(x(t)-2)\cdot x'(t)+2y(t)\cdot y'(t)=0$

$$\Leftrightarrow (x(t)-2)\cdot x'(t)+y(t)\cdot y'(t)=0$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$(x(t_0)-2)\cdot x'(t_0)+y(t_0)\cdot y'(t_0)=0\Leftrightarrow(1-2)\cdot x'(t_0)+1\cdot y'(t_0)=0$

$$\Leftrightarrow -x'(t_0)+y'(t_0)=0\Leftrightarrow y'(t_0)=x'(t_0)$$

Άρα, καθώς περνάει από το σημείο Β, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y ισούται με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f(0)=\eta\mu 0+1=1$

Είναι: • $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{1-x}-\frac{1-x}{1-x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-(1-x)}{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x\cdot(1-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$$

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\in\mathbb{R}$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Συνεπώς ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(0,1)$

Είναι $f'(0)=\varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow 1=\varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \omega=\dfrac{\pi}{4}\text{rad}$

Δ2. α. • Για τη ευθεία ΛΝ είναι $\lambda_{\Lambda N}=\dfrac{y_N-y_\Lambda}{x_N-x_\Lambda}$ άρα $\lambda_{\Lambda N}=\dfrac{0-2}{4-2}=\dfrac{-2}{2}=-1$

Είναι $(\Lambda N): y-y_\Lambda=\lambda_{\Lambda N}\cdot(x-x_\Lambda)$

Άρα $y-2=-1\cdot(x-2)\Leftrightarrow y=-x+2+2$

$$\Leftrightarrow y=-x+4 \quad (\Lambda N)$$

• Για την ευθεία ΚΜ είναι $\lambda_{KM}=\dfrac{y_M-y_K}{x_M-x_K}$ άρα $\lambda_{KM}=\dfrac{2-0}{4-2}=\dfrac{2}{2}=1$

Είναι $(KM): y-y_M=\lambda_{KM}\cdot(x-x_M)$

Άρα $y-2=1\cdot(x-4)\Leftrightarrow y=x-4+2$

$$\Leftrightarrow y=x-2 \quad (KM)$$

β. • Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x)=f(x)-(-x+4)$ με $x\in[2,4]$

Η Φ είναι συνεχής στο $[2,4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $\Phi(2)=\eta\mu 2+1+2-4=\eta\mu 2-1<0$

$\Phi(4)=\eta\mu 4+1+4-4=\eta\mu 4+1>0$

Οπότε $\Phi(2)\cdot\Phi(4)<0$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1\in(2,4)$ ώστε $\Phi(x_1)=0$ άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει την ΛΝ σ' ένα τουλάχιστον σημείο .

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=f(x)-(x-2)$ με $x\in[2,4]$.

Η K είναι συνεχής στο $[2,4]$ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $K(2)=f(2)-(2-2)=f(2)=\eta\mu 2+1>0$

$K(4)=f(4)-(4-2)=\eta\mu 4+1-2=\eta\mu 4-1<0$

Οπότε $K(2)\cdot K(4)<0$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_2\in(2,4)$ ώστε $K(x_2)=0$

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει την ΚΜ σ ένα τουλάχιστον σημείο.

Δ3. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x}=0$

Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Για $x>0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x+1=0\Leftrightarrow \eta\mu x=-1$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

Επειδή υπάρχουν άπειροι ακέραιοι $\kappa\in\mathbb{Z}$ άρα η ασύμπτωτη και η γραφική παράσταση της f να έχουν άπειρα κοινά σημεία.

Δ4. α. Για $x>0$, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2

γιατί $\eta\mu x\le 1\Leftrightarrow \eta\mu x+1\le 2\Leftrightarrow f(x)\le 2$

Άρα $f(x)=2\Leftrightarrow \eta\mu x+1=2\Leftrightarrow \eta\mu x=1$

$$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

Αλλά $x>0\Leftrightarrow 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}>0\Leftrightarrow 2\kappa\pi>-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \kappa>-\frac{1}{4}$

Άρα $\kappa = 0$, συνεπώς $x = \frac{\pi}{2}$

Επομένως, το σημείο που η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει μέγιστη τιμή για πρώτη φορά είναι το $B\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$.

Για $x > 0$, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι το 0

γιατί $\eta\mu x \geq -1 \Leftrightarrow \eta\mu x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

Άρα $f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -1$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Αλλά $x > 0 \Leftrightarrow 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow 2\kappa\pi > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \kappa > \frac{1}{4}$

Άρα $\kappa = 1$, συνεπώς $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

Συνεπώς το σημείο που η γραφική παράσταση f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για πρώτη φορά είναι το $\Gamma\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$.

β. Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Είναι: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

Αλλά, $0 < \frac{2003}{2021} < 2$ οπότε υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ώστε $f(x_0) = \frac{2003}{2021}$

Είναι: $1 < \frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2003}{2021} < \frac{2003}{2021}x_0 \Leftrightarrow f(x_0) < \frac{2003}{2021}x_0$

Άρα, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) < \frac{2003}{2021}x_0$