3η ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2020 – 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.

μονάδες 4

Α2. Να αποδείξετε ότι:
Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x ln\alpha$.

μονάδες 7

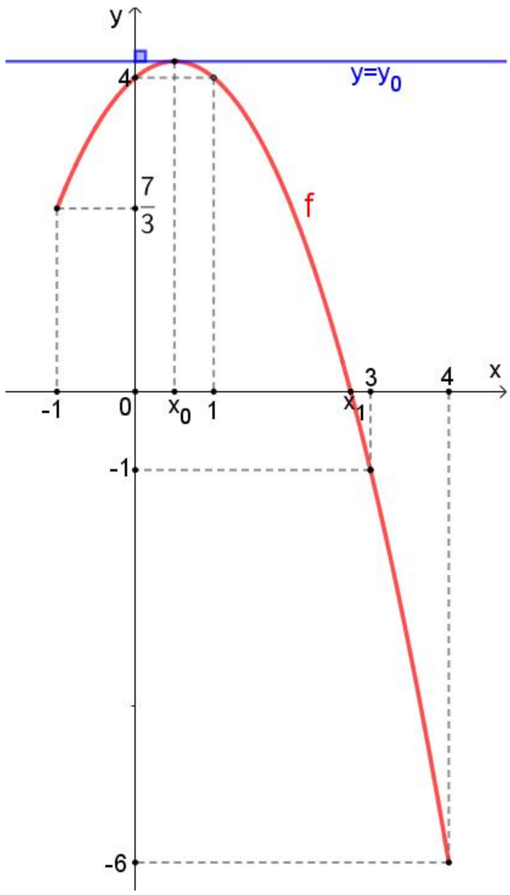
Α3. Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι $1-1$, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$, όταν ορίζεται, είναι $1-1$.

(μονάδα 1, για τον χαρακτηρισμό Σωστό / Λάθος
μονάδες 3, για την αιτιολόγηση)

μονάδες 4

Α4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $\boldsymbol{f}$. Η ευθεία $y = y_0$ εφάπτεται στη C_f στο x_0, η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο x_1 και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1, 4]$.
Να γράψετε στο απαντητικό σας φύλλο τον αριθμό της κάθε πρότασης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.



1. Για την f στο $[1,3]$ δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις για το θεώρημα

   Α. Bolzano Β. Rolle

   Γ. Μέσης Τιμής Δ. Μέγιστης Ελάχιστης Τιμής

2. Το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ είναι το

   Α. $[-1,4]$ Β. $[0,3]$ Γ. $[-1,0] \cup [1,3]$ Δ. $[-1,0] \cup [1,4]$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(f(1))}{f(x)-f(x_0)} =$

   Α. $-\frac{3}{2}$ Β. $+\infty$ Γ. $-\infty$ Δ. 0

4. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λάθος;

   Α. Υπάρχει $\xi \in (0,4)$: $f'(\xi) = -2{,}5$.

   Β. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2$ έχει μοναδική ρίζα στο $[1,3]$.

   Γ. $\lim\limits_{x \to x_1^-} \frac{\eta\mu x - x}{f(x)} = +\infty$.

   Δ. $f'(x_0) = f(x_1)$.

5. Ο ρυθμός μεταβολής της f μεγιστοποιείται στο

   Α. -1 Β. x_0 Γ. x_1 Δ. 4

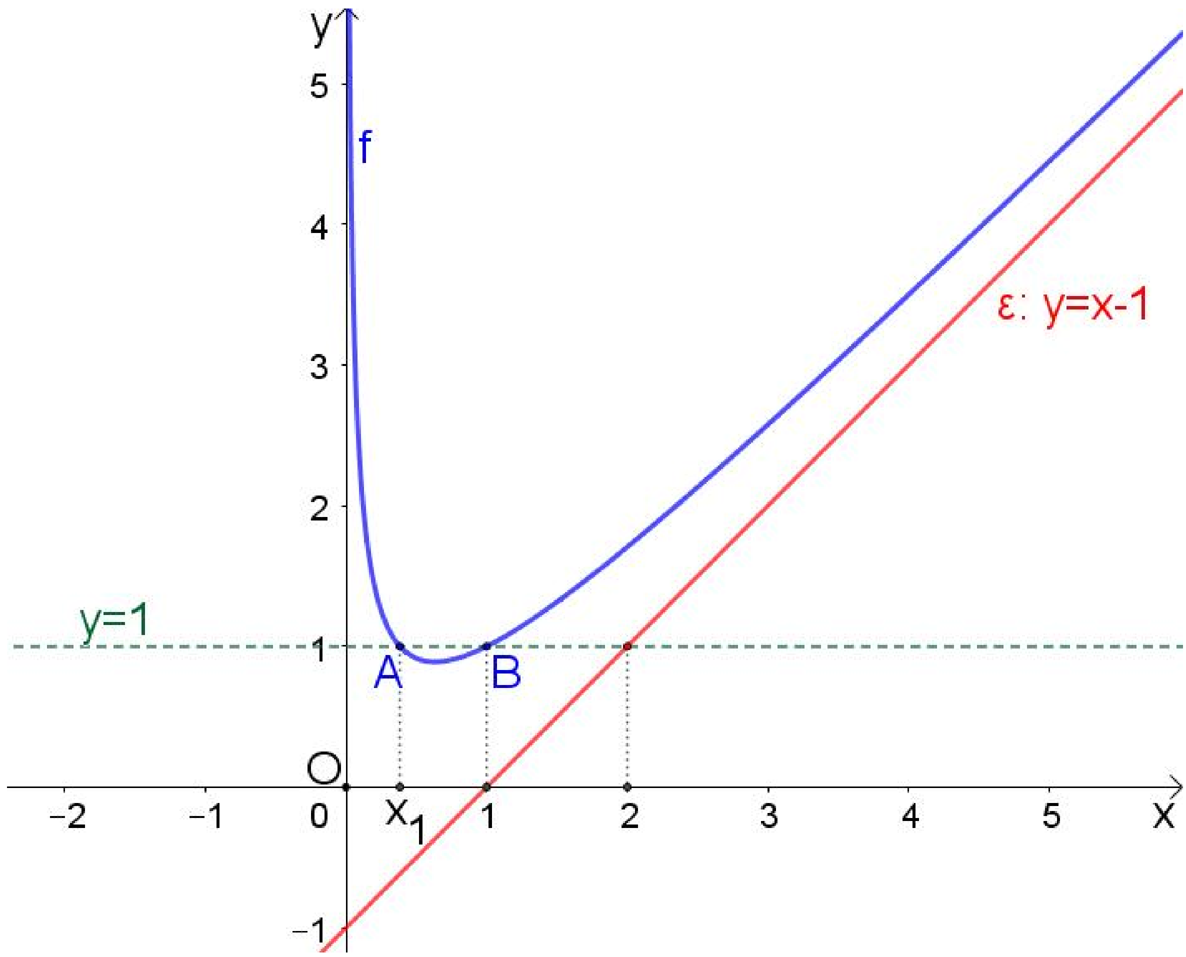
μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης και κυρτής συνάρτησης f, για την οποία υπάρχει η παράγωγος κάθε τάξης, φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Η ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Θεωρούμε επίσης και τις συναρτήσεις g, h με $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ και $h(x) = x \cdot f(x)$.



Β1. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cdot g(x) - 1}{\eta\mu \frac{1}{x}}$.

μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (x_1 , 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_h στο σημείο της, $\Gamma(x_0 , h(x_0))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

μονάδες 7

B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

[*οι αριθμοί* x_0 *και* $f(x_0)$ *θεωρούνται γνωστοί*].

μονάδες 6

B4. Να αποδείξετε ότι η C_g τέμνει την ευθεία (ε) ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη $\xi \in (1\,,2)$.

μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{e^x - x}$, για κάθε $x \in A$, όπου A είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο μπορεί να οριστεί η f.

Δίνεται επίσης η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση g με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία γνωρίζουμε ότι: $xg'(x) \geq f^2(x) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε το σύνολο Α.

μονάδες 3

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_0, f(x_0))$, με $x_0 < 0$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f στο M να την διαπερνά.

μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α. $g'(0) = 0$, *(3 μονάδες)*

β. $g''(0) \geq \frac{1}{2}$. *(6 μονάδες)*

μονάδες 9

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g' σε ένα, τουλάχιστον, σημείο της, $K(\kappa\,, g'(\kappa))$, με $\kappa \in [0,1)$, διέρχεται από το σημείο $B(1, f''(\kappa) + g'(\kappa))$.

μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Για την συνάρτηση $x(t) = \alpha t(t-2)$, $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, γνωρίζουμε ότι: $x(t) \leq 4$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

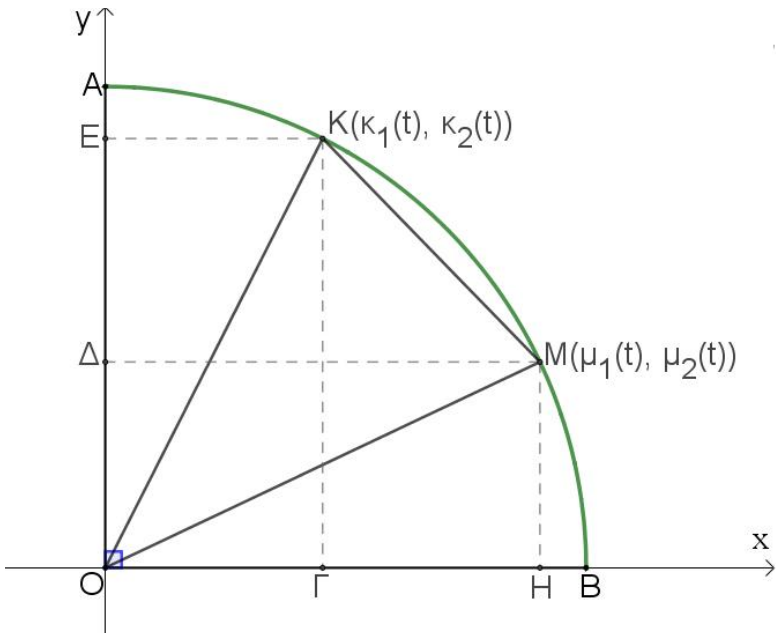
Δ1. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

μονάδες 5

Έστω ότι $\alpha = -4$.

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με μονάδα το 1 cm, θεωρούμε το τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου $c: x^2 + y^2 = 16$ με $x, y > 0$.

Δύο σημεία $M(\mu_1, \mu_2)$, με $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ και $K(\kappa_1, \kappa_2)$, με $\kappa_1, \kappa_2 \geq 0$, κινούνται πάνω στο τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{AB}$ ώστε, σε κάθε χρονική στιγμή t min, να είναι $\mu_1(t) = x(t)$ και $\kappa_1(t) = \frac{x(t)}{2}$.



Δ2. Να βρείτε:

α. τη χρονική διάρκεια της κίνησης του σημείου K,

(2 μονάδες)

β. το είδος (επιταχυνόμενη, επιβραδυνόμενη) και τη φορά (θετική, αρνητική) της κίνησης της προβολής $\Gamma(\kappa_1(t), 0)$ του σημείου K πάνω στον άξονα $x'x$ σε όλη τη χρονική διάρκεια της κίνησης του σημείου K,

(4 μονάδες)

γ. το συνολικό διάστημα (σε cm) που διάνυσε το σημείο K.

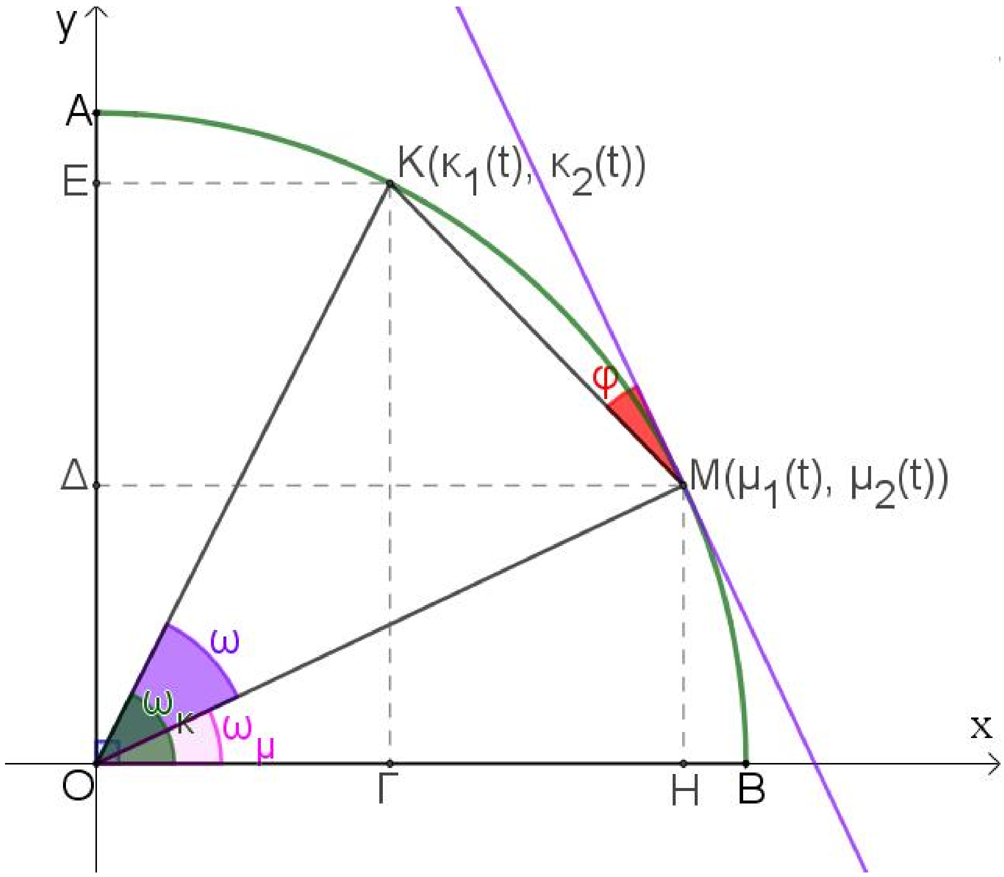
(3 μονάδες)

μονάδες 9

Έστω (ε): η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M και

φ: η οξεία γωνία που σχηματίζει η (ε) με τη χορδή KM στο σημείο M, όπως φαίνονται στο επόμενο σχήμα.

Έστω επίσης ω , ω_κ , ω_μ: οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στα τόξα $\overset{\frown}{KM}$, $\overset{\frown}{KB}$, $\overset{\frown}{MB}$ αντίστοιχα.



Δ3. Να αποδείξετε ότι:

α. $\omega = 2\varphi$, *(1 μονάδα)*

β. $\omega'_\kappa(t) = -\frac{\kappa'_1(t)}{\kappa_2(t)}$. *(5 μονάδες)*

μονάδες 6

Θεωρείστε γνωστό ότι: $\omega'_\mu(t) = -\frac{\mu'_1(t)}{\mu_2(t)}$.

Δ4. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η γωνία φ, αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

μονάδες 5

---------- * * * ----------

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.

Σχολικό βιβλίο σελίδα 77.

Α2. Να αποδείξετε ότι:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x ln\alpha$.

Σχολικό βιβλίο σελίδα 116.

Α3. Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

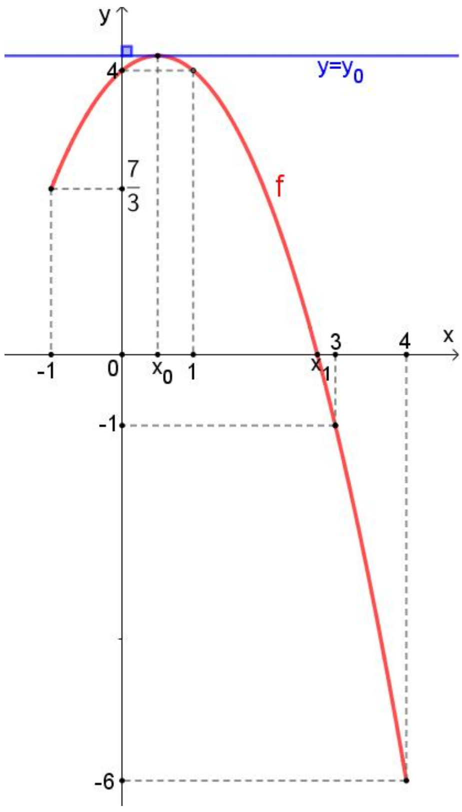
Αν οι συναρτήσεις f, g είναι $1-1$, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ όταν ορίζεται είναι $1-1$.

Λάθος.

Αντιπαράδειγμα: Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = 2x$. Προφανώς οι f, g είναι $1-1$, αφού είναι γνησίως αύξουσες, όμως η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x) = 2x^2$ δεν είναι $1-1$, αφού $-1 \neq 1$ ενώ $h(-1) = h(1) = 2$.

Α4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $\boldsymbol{f}$. Η ευθεία $y = y_0$ εφάπτεται στη C_f στο x_0 , η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο x_1 και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1, 4]$.

Να γράψετε στο απαντητικό σας φύλλο τον αριθμό της κάθε πρότασης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.



1. Για την f στο $[1,3]$ δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις για το θεώρημα

Α. Bolzano Β. Rolle
Γ. Μέσης Τιμής Δ. Μέγιστης Ελάχιστης Τιμής

Β.

Είναι $f(1) = 4 \neq -1 = f(3)$.

2. Το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ είναι το

Α. $[-1,4]$ Β. $[0,3]$ Γ. $[-1,0] \cup [1,3]$ Δ. $[-1,0] \cup [1,4]$

Γ.

$D_{f\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{-1 \leq x \leq 4 \mid -1 \leq f(x) \leq 4\} = [-1,0] \cup [1,3]$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(f(1))}{f(x)-f(x_0)} =$

Α. $-\frac{3}{2}$ Β. $+\infty$ Γ. $-\infty$ Δ. 0

Β.

$f(f(1)) = f(4) = -6 < 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$ με $f(x) - f(x_0) < 0$ για x κοντά στο x_0 , άρα $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)-f(x_0)} = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(f(1))}{f(x)-f(x_0)} = +\infty$.

4. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λάθος;

Α. Υπάρχει $\xi \in (0,4)$: $f'(\xi) = -2{,}5$.
Β. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2$ έχει μοναδική ρίζα στο $[1,3]$.
Γ. $\lim\limits_{x\to x_1^-} \frac{\eta\mu x - x}{f(x)} = +\infty$.
Δ. $f'(x_0) = f(x_1)$.

Γ.

Η Α ισχύει από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, 4]$.

Η Β ισχύει επειδή όπως βλέπουμε από το σχήμα είναι $2 < \frac{7}{3}$ και η ευθεία $y = 2$ τέμνει την C_f ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in [1,3]$, άρα η εξίσωση $f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $[1, 3]$.

Η Γ είναι λάθος, αφού $\eta\mu x < x$, για κάθε $x > 0$ και $x_1 > 0$, οπότε $\eta\mu x_1 < x_1 \Leftrightarrow \eta\mu x_1 - x_1 < 0$ και $\lim\limits_{x\to x_1^-} f(x) = 0$ με $f(x) > 0$, για κάθε $x < x_1$ κοντά στο x_1 οπότε $\lim\limits_{x\to x_1^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ και προφανώς $\lim\limits_{x\to x_1^-} \frac{\eta\mu x - x}{f(x)} = -\infty$.

Η Δ ισχύει αφού $f'(x_0) = f(x_1) = 0$.

5. Ο ρυθμός μεταβολής της f μεγιστοποιείται στο

Α. -1 Β. x_0 Γ. x_1 Δ. 4

Α.

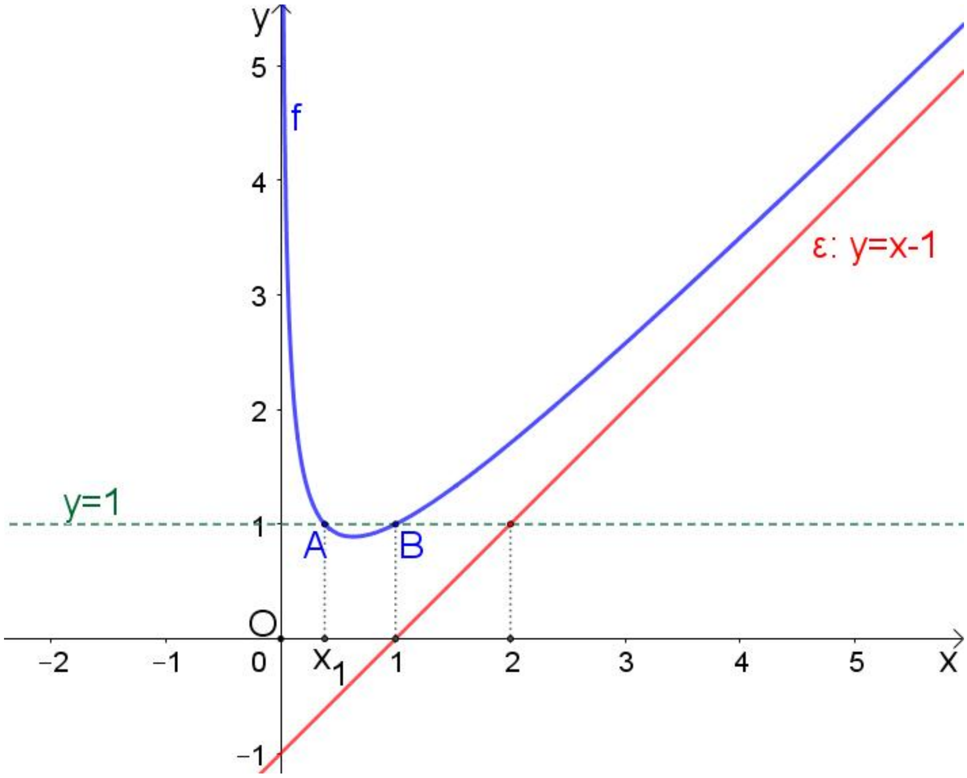
Ο ρυθμός μεταβολής της f σε κάθε σημείο της $x \in [-1,4]$ είναι $f'(x)$.

Η f είναι κοίλη, άρα $f' \searrow [-1,4]$, οπότε η f' μεγιστοποιείται στο -1.

ΘΕΜΑ Β

Η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης και κυρτής συνάρτησης f, για την οποία υπάρχει η παράγωγος κάθε τάξης, φαίνεται στο επόμενο σχήμα.
Η ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Θεωρούμε επίσης και τις συναρτήσεις g, h με $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ και $h(x) = x \cdot f(x)$.



Β1. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x \cdot g(x) - 1}{\eta\mu\frac{1}{x}}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x \cdot g(x)-1}{\eta\mu\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{f(x)}-1}{\eta\mu\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-f(x)}{f(x)}}{\eta\mu\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-f(x)}{f(x)\eta\mu\frac{1}{x}}$.

Επειδή η ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αυτό σημαίνει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = -1$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - f(x)) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} x\eta\mu\frac{1}{x}\right)$, με $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = \begin{matrix}\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ u=\frac{1}{x}\\ u\to 0^+\end{matrix} = \lim\limits_{u\to0^+}\frac{\eta\mu u}{u} = 1$, άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot g(x)-1}{\eta\mu\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-f(x)}{f(x)\eta\mu\frac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-f(x))}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1\cdot1} = 1.$$

Τελικά $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot g(x)-1}{\eta\mu\frac{1}{x}} = 1$.

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (x_1\,,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_h στο σημείο της, $\Gamma(x_0\,,h(x_0))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Με βάση το σχήμα, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (x_1\,,1)$ τέτοιο, ώστε $f\searrow(0,x_0]$ και $f\nearrow[x_0\,,+\infty)$. Το $f(x_0)$ είναι το ολικό ελάχιστο της f και εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(x_0)=0$.

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_h στο σημείο της, $\Gamma(x_0\,,h(x_0))$, είναι $\varepsilon_1 : y = h'(x_0)(x-x_0)+h(x_0)$.

Είναι $h'(x) = \big(x\cdot f(x)\big)' = f(x)+x\cdot f'(x)$ και για $x=x_0$:

$h(x_0) = x_0\cdot f(x_0)$ και $h'(x_0) = f(x_0)+x_0\cdot f'(x_0) = f(x_0)+x_0\cdot 0 = f(x_0)$, οπότε $\varepsilon_1 : y = f(x_0)(x-x_0)+x_0\cdot f(x_0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της (ε_1) με τον άξονα $y'y$ βάζουμε όπου $x=0$, οπότε $y = f(x_0)(0-x_0)+x_0\cdot f(x_0) = 0$ δηλαδή υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (x_1\,,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_h στο σημείο της, $\Gamma(x_0\,,h(x_0))$, να διέρχεται από την αρχή, $O(0,0)$, των αξόνων.

Θα αποδείξουμε ότι το x_0 είναι μοναδικό.

Έστω κάποιο $x_2 \in (x_1\,,1)$ με $x_2 \neq x_0$. Η εξίσωση εφαπτομένης, (ε_2), της C_h στο σημείο της, $\Delta(x_2\,,h(x_2))$, είναι $\varepsilon_2 : y = h'(x_2)(x-x_2)+h(x_2) \Leftrightarrow$

$\varepsilon_2 : y = \big(f(x_2)+x_2\cdot f'(x_2)\big)(x-x_2)+x_2\cdot f(x_2)$ και για $x=0$:

$y = \big(f(x_2)+x_2\cdot f'(x_2)\big)(0-x_2)+x_2\cdot f(x_2) = -x_2^2\cdot f'(x_2) \neq 0$,

αφού $x_2 \neq 0$ και $f'(x_2)\neq 0$, εφόσον η f είναι κυρτή δηλαδή

$f'\nearrow(0,+\infty)$ άρα και $1-1$, οπότε το x_0 θα είναι η μοναδική της ρίζα. Άρα η εφαπτομένη της C_h σε οποιοδήποτε άλλο σημείο της με τετμημένη $x_2 \neq x_0$ δεν διέρχεται από την αρχή, $O(0,0)$, των αξόνων.

Αποδείξαμε δηλαδή ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_h στο σημείο της, $\Gamma(x_0, h(x_0))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

(οι αριθμοί x_0 και $f(x_0)$ του ερωτήματος (B2) θεωρούνται γνωστοί.)

Έστω $x_1, x_2 \in (0, x_0)$ με $0 < x_1 < x_2 < x_0 \xRightarrow{f\downarrow(0,x_0]} 0 < f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow 0 < \frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)} \Rightarrow 0 < g(x_1) < g(x_2)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(0, x_0]$, θα είναι $g\nearrow(0, x_0] \Rightarrow$

$\boldsymbol{g((0, x_0])} = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} g(x), g(x_0)\right] = \left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f(x_0)}}\right]$,

επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0^+$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ και $g(x_0) = \frac{1}{f(x_0)}$.

Έστω $x_1, x_2 \in (x_0, +\infty)$ με $x_0 < x_1 < x_2 \xRightarrow{f\uparrow[x_0,+\infty)} 0 < f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow 0 < \frac{1}{f(x_2)} < \frac{1}{f(x_1)} \Rightarrow 0 < g(x_2) < g(x_1)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[x_0, +\infty)$, θα είναι $g\searrow[x_0, +\infty) \Rightarrow$

$\boldsymbol{g([x_0, +\infty))} = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} g(x), g(x_0)\right] = \left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f(x_0)}}\right]$,

επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0^+$, αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ και $g(x_0) = \frac{1}{f(x_0)}$.

Το σύνολο τιμών της g είναι $\boldsymbol{g([0, +\infty)) = g((0, x_0]) \cup g([x_0, +\infty))} = \left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f(x_0)}}\right] \cup \left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f(x_0)}}\right] = \left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f(x_0)}}\right]$.

B4. Να αποδείξετε ότι η C_g τέμνει την ευθεία (ε) ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη $\xi \in (1, 2)$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = x - 1$ έχει μοναδική λύση στο $(1, 2)$, δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = \xi - 1$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $q(x) = g(x) - (x - 1)$, $x \in [1, 2]$.

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $\boldsymbol{q(\xi) = 0}$.

- η q είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως διαφορά συνεχών,
- Είναι $q(1) = g(1) - (1 - 1) = \frac{1}{f(1)} - 0 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{q(1) = 1} > 0$ και

$x_0 < 1 < 2 \xRightarrow{g\downarrow[x_0,+\infty)} g(1) > g(2) \Rightarrow \frac{1}{f(1)} > g(2) \Rightarrow g(2) < 1 \Rightarrow g(2) - 1 < 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{q(2)} < 0$, οπότε $\boldsymbol{q(1)\cdot q(2)} < 0$,
άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano για την q στο $[1,2]$, οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (1\,,2)$ τέτοιο, ώστε $q(\xi) = 0$.

Θα βρούμε τώρα τη μονοτονία της q στο $[1,2]$.

Έστω $x_1\,, x_2 \in [1,2]$ με $1 \le x_1 < x_2 \le 2 \xRightarrow{g\downarrow[1,2]} g(x_1) > g(x_2)$ (1).
Επίσης $x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow -(x_1 - 1) > -(x_2 - 1)$ (2).
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) έχουμε:
$g(x_1) - (x_1 - 1) > g(x_2) - (x_2 - 1) \Rightarrow q(x_1) > q(x_2) \Rightarrow q\searrow[1,2]$ άρα η q είναι $1-1$, οπότε το ξ είναι μοναδικό.
Αποδείξαμε δηλαδή ότι υπάρχει μοναδικό $\boldsymbol{\xi \in (1\,,2)}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{q(\xi) = 0}$, το οποίο ισοδύναμα σημαίνει ότι

η C_g τέμνει την ευθεία (ε) ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη $\xi \in (1\,,2)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{e^x - x}$, για κάθε $x \in A$, όπου A είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο μπορεί να οριστεί η f.
Δίνεται επίσης η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση g με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία γνωρίζουμε ότι: $xg'(x) \ge f^2(x) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε το σύνολο A.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x - x \ge 0\}$.
Θεωρείται γνωστό ότι $e^x \ge x + 1 > x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.
Επομένως $e^x > x \iff e^x - x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $\boldsymbol{A = \mathbb{R}}$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_0, f(x_0))$, με $x_0 < 0$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f στο M, να την διαπερνά.

Είναι $f'(x) = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
$f''(x) = \cdots = \frac{e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 1}{4(e^x - x)\sqrt{e^x - x}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Έστω $\varphi(x) = e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Τότε $f''(x) = \frac{\varphi(x)}{4(e^x - x)\sqrt{e^x - x}}$, $x \in \mathbb{R}$.
Είναι $\varphi'(x) = \cdots = 2e^x(e^x - x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $e^x > 0$ και $e^x - x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $\varphi \nearrow \mathbb{R}$.

Επειδή $\varphi \nearrow \mathbb{R}$ και συνεχής $\Rightarrow \varphi((-\infty, 0]) = \left(\lim_{x \to -\infty} \varphi(x), \varphi(0)\right]$, με $\varphi(0) = 2$ και $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1$, αφού

$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{(-\infty)}{(+\infty)}}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$ και
$\lim_{x \to -\infty} 2e^x = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$. Άρα $\varphi((-\infty, 0]) = (-1, 2]$

Το $0 \in (-1, 2] \Rightarrow$ υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-\infty, 0)$ (αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1 − 1), τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = 0$ και για κάθε $x < x_0 \overset{\varphi \uparrow \mathbb{R}}{\Longrightarrow}$ $\varphi(x) < \varphi(x_0) \Rightarrow \varphi(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$
$\boldsymbol{f} \frown (-\infty, \boldsymbol{x_0})$ ενώ για κάθε $x > x_0 \overset{\varphi \uparrow \mathbb{R}}{\Longrightarrow}$
$\varphi(x) > \varphi(x_0) \Rightarrow \varphi(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{f} \smile (\boldsymbol{0}, +\infty)$.

Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 < 0$, οπότε ορίζεται εφαπτομένη στο x_0 και εκατέρωθεν του x_0 η f αλλάζει τα κοίλα, επομένως το $(x_0, f(x_0))$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f. Γνωρίζουμε ότι το σημείο καμπής της C_f είναι το μοναδικό σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_f την διαπερνά, άρα

υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_0, y_0)$, με $x_0 < 0$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f στο M, να την διαπερνά.

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α. $g'(0) = 0$,

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = xg'(x) - f^2(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή $h(x) = xg'(x) - e^x + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, με $h'(x) = g'(x) + xg''(x) - e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $h(0) = 0$ και $h(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow h(x) \geq h(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε από θ. Fermat: $h'(0) = 0 \Leftrightarrow g'(0) + 0g''(0) - e^0 + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{g'(0) = 0}$ **(1).**

β. $g''(0) \geq \frac{1}{2}$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $p(x) = 2g'(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$.
Η p είναι παραγωγίσιμη με $p'(x) = 2g''(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Είναι $p'(0) = 2g''(0) - 1$. Όμως $p'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{p(x)-p(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{p(x)-p(0)}{x-0}$, άρα $\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} \frac{p(x)-p(0)}{x-0} = 2g''(0) - 1 \quad (2)}$.

Είναι $xg'(x) \geq f^2(x) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$xg'(x) \geq e^x - x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$2xg'(x) \geq 2e^x - 2x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$2xg'(x) - x^2 \geq 2e^x - 2x - 2 - x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$x(2g'(x) - x) \geq 2e^x - 2x - 2 - x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$xp(x) \geq 2e^x - 2x - 2 - x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x > 0$ ισχύει: $p(x) \geq \frac{2e^x - 2x - 2 - x^2}{x}$
Έστω $h(x) = 2e^x - 2x - 2 - x^2$, $x \geq 0$. Τότε $p(x) \geq \frac{h(x)}{x}$, $x > 0$.
Είναι $h(0) = 0$ και $h'(x) = 2e^x - 2 - 2x = 2(e^x - 1 - x) > 0$, για κάθε $x > 0$, αφού όπως είναι γνωστό ισχύει $e^x > x + 1$, για κάθε $x > 0$, και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, θα είναι $h \nearrow [0, +\infty) \Rightarrow h(x) > h(0)$, για κάθε $x > 0 \Rightarrow h(x) > 0$, για κάθε $x > 0 \Rightarrow$
$p(x) \geq \frac{h(x)}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$, και επειδή $p(0) = 2g'(0) - 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} p(0) = 0$, άρα για κάθε $x > 0 \Rightarrow p(x) > p(0)$, οπότε για $x > 0$ κοντά στο 0 είναι $\frac{p(x)-p(0)}{x-0} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} \frac{p(x)-p(0)}{x-0} \geq 0}$ **(3)**, αφού όπως είδαμε πιο πάνω το όριο υπάρχει.
Από (3) $\overset{(2)}{\Rightarrow} \boldsymbol{2g''(0) - 1 \geq 0 \Rightarrow g''(0) \geq \frac{1}{2}}$ **(4)**.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g' σε ένα, τουλάχιστον, σημείο της, $K(\kappa, g'(\kappa))$, με $\kappa \in [0,1)$, διέρχεται από το σημείο $B(1, f''(\kappa) + g'(\kappa))$.

Η εξίσωση εφαπτομένης της $C_{g'}$ σε οποιοδήποτε σημείο της, $K(\kappa, g'(\kappa))$, με $\kappa \in [0,1)$, είναι: $\varepsilon: y = g''(\kappa)(x - \kappa) + g'(\kappa)$.

Για να αποδείξουμε ότι η (ε) διέρχεται από το σημείο $B(1, f''(\kappa) + g'(\kappa))$ αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\kappa \in [0,1)$ για το οποίο να ισχύει:

$f''(\kappa) + g'(\kappa) = g''(\kappa)(1-\kappa) + g'(\kappa) \Leftrightarrow$

$f''(\kappa) + g''(\kappa)(\kappa - 1) = 0.$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = f''(x) + g''(x)(x-1)$, $x \in [0,1]$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\boldsymbol{\kappa \in [0,1)}$ για το οποίο να ισχύει: $\boldsymbol{h(\kappa) = 0}$.

Είναι $h(0) = f''(0) - g''(0) = \frac{1}{2} - g''(0) \leq 0$ από (4), αφού

$f''(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Δηλαδή $\boldsymbol{h(0) \leq 0}$ (5).

Επίσης $h(1) = f''(1) > 0$, αφού όπως είδαμε στο Γ2, είναι $f''(x) > 0$, για κάθε $x > x_0$ με $x_0 < 0 < 1$, δηλαδή $\boldsymbol{h(1)} > 0$ (6).

Από $(5),(6) \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} h(0) \cdot h(1) \leq 0$.

- Αν $h(0) = 0$, το 0 είναι ρίζα της h.
- Αν $h(0) \cdot h(1) < 0$, τότε αφού επιπλέον η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως πράξεις συνεχών, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει, τουλάχιστον, ένα $\kappa \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(\kappa) = 0$.

Αποδείξαμε δηλαδή σε κάθε περίπτωση ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\boldsymbol{\kappa \in [0,1)}$ για το οποίο να ισχύει: $\boldsymbol{h(\kappa) = 0}$.

Αυτό όπως είδαμε παραπάνω, ισοδύναμα, σημαίνει ότι

η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $\boldsymbol{g'}$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο της, $\boldsymbol{K(\kappa, g'(\kappa))}$, με $\boldsymbol{\kappa \in [0,1)}$, διέρχεται από το σημείο $\boldsymbol{B(1, f''(\kappa) + g'(\kappa))}$.

ΘΕΜΑ Δ

Για την συνάρτηση $x(t) = at(t-2)$, $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, γνωρίζουμε ότι: $x(t) \leq 4$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Θα βρούμε πρώτα τα ακρότατα της συνάρτησης $x(t)$.

Είναι $x(t) = \alpha t^2 - 2\alpha t \Rightarrow x'(t) = 2\alpha t - 2\alpha = 2\alpha(t-1)$.

Αν $\alpha > 0$ έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων του $x'(t)$ και μεταβολών της συνάρτησης x.

t	$-\infty$	1	$+\infty$
$x'(t)$	$-$	0	$+$
x	↘	-α	↗

Το $x(1) = -\alpha$ θα είναι το ολικό ελάχιστο της x και θα ισχύει: $x(t) \geq -\alpha$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, το οποίο όμως απορρίπτεται αφού $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$, δηλαδή η $x(t)$ παίρνει πολύ μεγάλες τιμές κοντά στο $+\infty$, επομένως $x(t) > 4$ για t κοντά στο $+\infty$. *Αυτό όμως είναι άτοπο* αφού $x(t) \leq 4$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Άρα $\alpha < 0$.

Έχουμε δηλαδή τον παρακάτω πίνακα προσήμων του $x'(t)$ και μεταβολών της συνάρτησης x.

t	$-\infty$	1	$+\infty$
$x'(t)$	$+$	0	$-$
x	↗	-α	↘

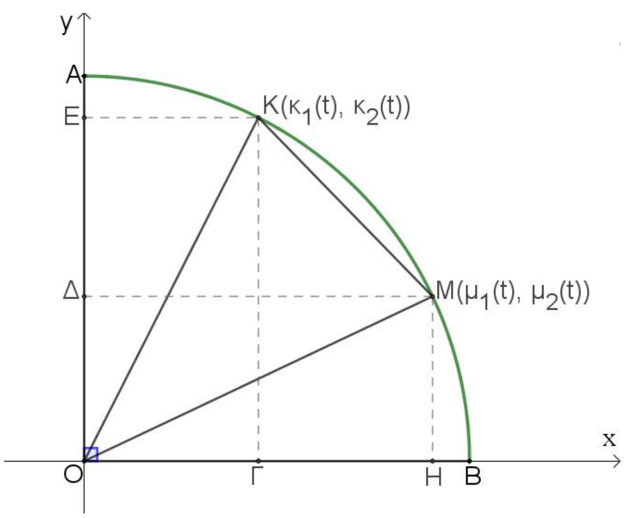
Το $x(1) = -\alpha$ είναι το ολικό μέγιστο της x και ισχύει: $x(t) \leq -\alpha$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Όμως ισχύει: $x(t) \leq 4$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επομένως, θα είναι $-\alpha \leq 4 \Leftrightarrow \alpha \geq -4$, δηλαδή

η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το α είναι το -4.

Έστω ότι $\alpha = -4$.

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με μονάδα το 1 cm, θεωρούμε το τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου $c: x^2 + y^2 = 16$ με $x, y > 0$.

Δύο σημεία $M(\mu_1, \mu_2)$, με $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ και $K(\kappa_1, \kappa_2)$, με $\kappa_1, \kappa_2 \geq 0$, κινούνται πάνω στο τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{AB}$ ώστε, σε κάθε χρονική στιγμή t min, να είναι $\mu_1(t) = x(t)$ και $\kappa_1(t) = \frac{x(t)}{2}$.



Δ2. Να βρείτε:

α. τη χρονική διάρκεια της κίνησης του σημείου K, Είναι $x(t) = -4t(t-2) = 8t - 4t^2$.

Για να κινείται το σημείο K στο τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{AB}$ πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα: $\begin{cases} \kappa_1(t) \geq 0 \\ \kappa_2(t) \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x(t)}{2} \geq 0 \\ 16 - \frac{x^2(t)}{4} \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) \geq 0 \\ x^2(t) \leq 64 \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) \geq 0 \\ -8 \leq x(t) \leq 8 \\ t \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x(t) \leq 8 \\ t \geq 0 \end{cases}$. Όμως $x(t) \leq 4$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ οπότε πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα: $\begin{cases} 0 \leq x(t) \leq 4 \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow t \in [0,2]$.

Επομένως η χρονική διάρκεια της κίνησης του σημείου K είναι 2 *min*.

β. το είδος (επιταχυνόμενη, επιβραδυνόμενη) και τη φορά (θετική, αρνητική) της κίνησης της προβολής $\Gamma(\kappa_1(t), 0)$ του σημείου K πάνω στον άξονα $x'x$ σε όλη τη χρονική διάρκεια της κίνησης του σημείου K,

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων του $x'(t)$ και μεταβολών της συνάρτησης x, από το ερώτημα (Δ1) έχουμε:

t	0	1	2
$x'(t)$	$+$	0	$-$
x	0 ↗	4	↘ 0

Είναι $\kappa_1(t) = \frac{x(t)}{2} = 4t - 2t^2$. Η στιγμιαία ταχύτητα με την οποία κινείται το σημείο Γ είναι $\upsilon_\Gamma(t) = \kappa_1'(t) = \frac{x'(t)}{2} = \frac{8-8t}{2} = 4(1-t)$ και η στιγμιαία επιτάχυνση είναι $\alpha_\Gamma(t) = \kappa_1''(t) = -4$ οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

t	0 — 1	1 — 2
$\upsilon_\Gamma(t)$	$+$ (0 στο 1)	$-$
$\alpha_\Gamma(t)$	$-$	$-$
$\upsilon_\Gamma(t) \cdot \alpha_\Gamma(t)$	$-$	$+$
κίνηση του σημείου Γ	**Επιβραδυνόμενη** κατά τη θετική φορά του άξονα	**Επιταχυνόμενη** κατά την αρνητική φορά του άξονα

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα,

- **Όταν $t \in [0,1)$, το σημείο Γ κινείται με επιβραδυνόμενη κίνηση (αφού $\upsilon_\Gamma(t) \cdot \alpha_\Gamma(t) < 0$) κατά τη θετική φορά του άξονα κίνησης (αφού $\upsilon_\Gamma(t) > 0$),**

- **τη χρονική στιγμή $t_1 = 1\,min$ είναι στιγμιαία ακίνητο (αφού $\upsilon_\Gamma(1) = 0$) και**
- **όταν $t \in (1, 2]$, το σημείο Γ κινείται με επιταχυνόμενη κίνηση (αφού $\upsilon_\Gamma(t) \cdot \alpha_\Gamma(t) > 0$) κατά την αρνητική φορά του άξονα κίνησης (αφού $\upsilon_\Gamma(t) < 0$).**

γ. το συνολικό διάστημα (σε cm) που διάνυσε το σημείο K.

Το σημείο K κινείται αντίστοιχα με το σημείο Γ. Έτσι, τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0\,min$ και $t_2 = 2\,min$ το σημείο K βρίσκεται στη θέση $A(0,4)$ ενώ τη χρονική στιγμή $t_1 = 1\,min$ βρίσκεται στη θέση $K_1(\kappa_1(1), \kappa_2(1)) = K_1(2, 2\sqrt{3})$. Τις ίδιες χρονικές στιγμές το σημείο Γ βρίσκεται στις θέσεις $O(0,0)$ και $\Gamma_1(2,0)$ αντίστοιχα. Για τη γωνία $\omega_1(1) = \widehat{K_1 O \Gamma_1}(1)$ ισχύει: $\sigma\upsilon\nu\omega_1 = \frac{O\Gamma_1}{OK_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, άρα $\omega_1(1) = \frac{\pi}{3}$ rad, οπότε $\widehat{AOK_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ rad.

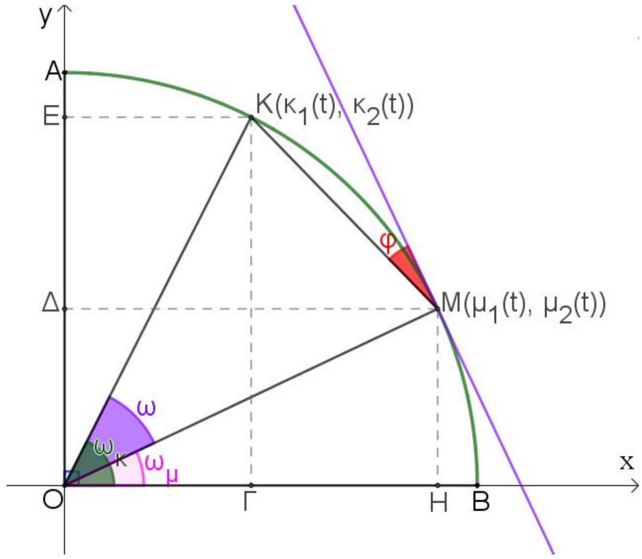
Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το σημείο K είναι

$$S = 2 \cdot l_{\overset{\frown}{AK_1}} = 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 4 = \frac{4\pi}{3}\ cm.$$

Έστω (ε): η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M και

φ: η οξεία γωνία που σχηματίζει η (ε) με τη χορδή επαφής KM στο σημείο M όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Έστω επίσης ω , ω_κ , ω_μ: οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στα τόξα $\overset{\frown}{KM}$, $\overset{\frown}{KB}$, $\overset{\frown}{MB}$ αντίστοιχα.



Δ3. Να αποδείξετε ότι:

α. $\omega = 2\varphi$,

Η γωνία φ ισούται με οποιαδήποτε εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{KM}$. Η εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{KM}$ θα είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο, δηλαδή με το μισό της γωνίας ω, επομένως $\varphi = \frac{\omega}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega = 2\varphi}$.

β. $\omega_\kappa'(t) = -\frac{\kappa_1'(t)}{\kappa_2(t)}$.

Είναι $\omega(t)=\omega_\kappa(t)-\omega_\mu(t)$, $\kappa_1^2(t)+\kappa_2^2(t)=16$, $\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)=16$.

Επίσης $\kappa_1^2(t)+\kappa_2^2(t)=16 \Rightarrow \left(\kappa_1^2(t)+\kappa_2^2(t)\right)'=0 \Rightarrow$

$2\kappa_1(t)\kappa_1'(t)+2\kappa_2(t)\kappa_2'(t)=0 \Rightarrow \boldsymbol{\kappa_2'(t)=\frac{-\kappa_1(t)\kappa_1'(t)}{\kappa_2(t)}}$ **(1).**

$$\varepsilon\varphi\omega_\kappa(t)=\frac{\kappa_2(t)}{\kappa_1(t)} \Rightarrow \left(\varepsilon\varphi\omega_\kappa(t)\right)'=\left(\frac{\kappa_2(t)}{\kappa_1(t)}\right)' \Rightarrow \frac{\omega_\kappa'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega_\kappa(t)}=\frac{\kappa_2'(t)\kappa_1(t)-\kappa_2(t)\kappa_1'(t)}{\kappa_1^2(t)} \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{\omega_\kappa'(t)}{\frac{\kappa_1^2(t)}{16}}=\frac{\frac{-\kappa_1(t)\kappa_1'(t)}{\kappa_2(t)}\kappa_1(t)-\kappa_2(t)\kappa_1'(t)}{\kappa_1^2(t)} \Rightarrow 16\omega_\kappa'(t)=-\frac{\kappa_1'(t)\kappa_1^2(t)+\kappa_1'(t)\kappa_2^2(t)}{\kappa_2(t)} \Rightarrow$$

$$16\omega_\kappa'(t)=-\frac{\kappa_1'(t)\left(\kappa_1^2(t)+\kappa_2^2(t)\right)}{\kappa_2(t)} \Rightarrow 16\omega_\kappa'(t)=-\frac{\kappa_1'(t)16}{\kappa_2(t)} \Rightarrow$$

$\boldsymbol{\omega_\kappa'(t)=-\frac{\kappa_1'(t)}{\kappa_2(t)}}$ **(2).**

Θεωρείστε γνωστό ότι: $\omega_\mu'(t)=-\frac{\mu_1'(t)}{\mu_2(t)}$.

Δ4. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η γωνία φ, αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

Δεχόμαστε ομοίως ότι: $\boldsymbol{\omega_\mu'(t)=-\frac{\mu_1'(t)}{\mu_2(t)}}$ **(3).**

Από $\omega(t)=\omega_\kappa(t)-\omega_\mu(t) \Rightarrow \omega'(t)=\omega_\kappa'(t)-\omega_\mu'(t) \xRightarrow{(2),(3)}$

$$\omega'(t)=-\frac{\kappa_1'(t)}{\kappa_2(t)}+\frac{\mu_1'(t)}{\mu_2(t)} \Rightarrow \omega'(t)=-\frac{x'(t)}{2\kappa_2(t)}+\frac{x'(t)}{\mu_2(t)} \Rightarrow$$

$$\omega'(t)=x'(t)\left(\frac{1}{\mu_2(t)}-\frac{1}{2\kappa_2(t)}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\omega'(t)=\frac{x'(t)\left(2\kappa_2(t)-\mu_2(t)\right)}{2\mu_2(t)\kappa_2(t)}}.$$

Είναι $0\le\kappa_1(t)<\mu_1(t)\le 4 \Rightarrow \kappa_1^2(t)<\mu_1^2(t)\le 16 \Rightarrow$

$16-\kappa_1^2(t)>16-\mu_1^2(t)\ge 0 \Rightarrow \kappa_2^2(t)>\mu_2^2(t) \Rightarrow \kappa_2(t)>\mu_2(t) \Rightarrow$

$\kappa_2(t)-\mu_2(t)>0 \Rightarrow 2\kappa_2(t)-\mu_2(t)>\kappa_2(t)>0 \Rightarrow$

$\boldsymbol{2\kappa_2(t)-\mu_2(t)>0}$.

Έστω $\omega'(t)\ge 0 \Leftrightarrow x'(t)\ge 0$, αφού $2\kappa_2(t)-\mu_2(t)>0$, $2\mu_2(t)\kappa_2(t)>0$

δηλαδή $\omega'(t)\ge 0 \Leftrightarrow 8(1-t)\ge 0 \Leftrightarrow t\le 1$.

Ο πίνακας μεταβολών της γωνίας ω είναι ο διπλανός.

t	0		1		2
$\omega'(t)$		+	0	−	
ω	0	↗	Ο.Μ.	↘	0

Η μέγιστη τιμή της γωνίας ω είναι $\omega(1) = \omega_\kappa(1) - \omega_\mu(1)$.
Για $t = 1$: $M\big(\mu_1(1), \mu_2(1)\big) = M(4,0)$ δηλαδή $\omega_\mu(1) = 0$, άρα $\omega(1) = \omega_\kappa(1)$.
Είναι $\sigma\upsilon\nu\big(\omega_\kappa(1)\big) = \frac{\kappa_1(1)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, με $0 < \omega_\kappa(1) < \frac{\pi}{2}$ άρα $\omega_\kappa(1) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$ $\omega(1) = \frac{\pi}{3}$, οπότε $\boldsymbol{\varphi(1) = \frac{\pi}{6}}$.

Επομένως, η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η γωνία φ είναι $\boldsymbol{\varphi(1) = \frac{\pi}{6}}$.

---------- * * * ----------