

2<sup>η</sup> ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2020 – 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

**ΘΕΜΑ Α****A1.** Να αποδείξετε ότι

η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

**μονάδες 6**

**A2.** Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

«Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  και  $f(0) = 2$ , τότε  $f((-\infty, 0]) = (-1, 2]$ .»

(μονάδα 1, για τον χαρακτηρισμό Σωστό / Λάθος  
μονάδες 2, για την αιτιολόγηση)

**μονάδες 3**

**A3.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της κάθε πρότασης και δίπλα τη λέξη **Σωστή**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(\alpha) > f(\beta)$ , τότε υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ , ώστε  $f'(x_0) < 0$ .

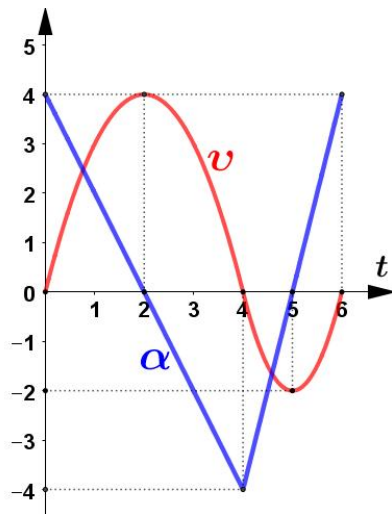
β. Αν  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$  είναι δύο συναρτήσεις τέτοιες, ώστε  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ , τότε ορίζεται πάντα η σύνθεση της  $g$  με την  $f$ .

γ. Αν  $-1 \leq f(x) \leq 2$  κοντά στο 0, τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(\sin x - 1)}{x} = 0$ .

δ. Αν η ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ , τότε η  $(\varepsilon)$  και η  $C_f$  δεν έχουν κοινά σημεία κοντά στο  $+\infty$ .

**μονάδες 8**

- A4.** Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της **ταχύτητας  $v$**  και της **επιτάχυνσης  $a$**  ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση σε έναν προσανατολισμένο άξονα, σε σχέση με τον χρόνο  $t$  (min).



Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της κάθε πρότασης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

- α)** Ποια χρονικά διαστήματα, το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά του άξονα κίνησης;  
A.  $t \in (0,4)$                       B.  $t \in (0,1) \cup (5,6)$   
Γ.  $t \in (0,2) \cup (4,5)$             Δ.  $t \in (2,5)$
- β)** Ποια χρονικά διαστήματα, το κινητό εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση;  
A.  $t \in (0,4)$                       B.  $t \in (0,1) \cup (5,6)$   
Γ.  $t \in (0,2) \cup (4,5)$             Δ.  $t \in (2,5)$
- γ)** Ποια χρονικά διαστήματα, το κινητό επιβραδύνει καθώς κινείται προς την αρνητική φορά του άξονα κίνησης;  
A.  $t \in (5,6)$                       B.  $t \in (0,1) \cup (5,6)$   
Γ.  $t \in (0,2) \cup (4,5)$             Δ.  $t \in (4,5)$
- δ)** Αν η ταχύτητα του κινητού μετράται σε  $km/min$ , ποιο είναι το μέτρο της μέγιστης στιγμιαίας ταχύτητας του κινητού όταν αυτό κινείται κατά την αρνητική φορά του άξονα κίνησης;  
A.  $v = 0 \text{ km/min}$                       B.  $v = 2 \text{ km/min}$   
Γ.  $v = -2 \text{ km/min}$                       Δ.  $v = 4 \text{ km/min}$

**μονάδες 8**

ΑΡΧΗ 3<sup>ΗΣ</sup> ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με

$$g(x) = \ln x + 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \quad \text{και}$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{\ln x}{ex} & , \quad \text{αν } x \in (0, 1] \\ \ln^2 x & , \quad \text{αν } x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

**B1.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$ .

**μονάδες 7**

$$\text{Έστω ότι } f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-x} & , \quad \text{αν } x \in (-\infty, 1] \\ (x-1)^2 & , \quad \text{αν } x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$ . Στη συνέχεια να ορίσετε την  $f^{-1}$  μόνο στην περίπτωση όπου  $f(x) = (x-1)^2$ , με  $x \in (1, +\infty)$ .

**μονάδες 7**

**B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

**μονάδες 5**

**B4.** Να λύσετε την ανίσωση:  $f^{-1}(x - f(x+1)) \leq f^{-1}(g(x+1) - 1)$ .

**μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x + \sin(2x)$ .

**Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα  $[0, \pi]$ . Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  στο διάστημα  $[0, \pi]$ .

**μονάδες 7**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon: y = x + 1$  εφάπτεται στη  $C_f$  σε άπειρα το πλήθος σημεία.

**μονάδες 5**

**Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{f(x)-1}$ .

**μονάδες 5**

ΤΕΛΟΣ 3<sup>ΗΣ</sup> ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΑΡΧΗ 4<sup>ΗΣ</sup> ΣΕΛΙΔΑΣ**

**Γ4.** Έστω  $\alpha, \beta \in [2, 3]$  τέτοια, ώστε:

$$\sin^2 g(\alpha) - \sin^2 g(\beta) < \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{2}, \quad \text{όπου } g(x) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}.$$

Να εξετάσετε ποια από τις παρακάτω προτάσεις προκύπτει από την υπόθεση αυτή (1 μονάδα) αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας (7 μονάδες).

- α.  $\alpha < \beta$                                       β.  $\alpha = \beta$                                       γ.  $\alpha > \beta$   
δ. δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία για να συμπεράνουμε τη διάταξη των  $\alpha, \beta$ .

**μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

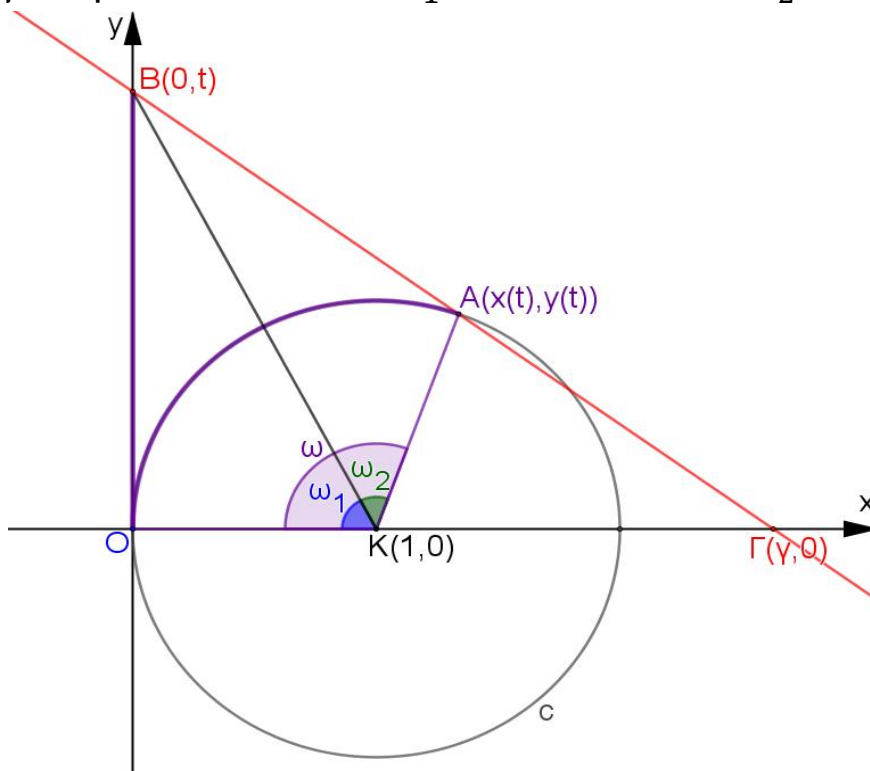
Ένα σημείο  $A(x(t), y(t))$ , κινείται πάνω στον κύκλο (c) με κέντρο το σημείο  $K(1, 0)$  και ακτίνα  $KO = 1$  cm, όπου  $O(0, 0)$ .

Η αρχική θέση του σημείου A είναι το O και κάθε χρονική στιγμή  $t$  sec έχει διαγράψει επίκεντρη γωνία  $\omega(t) = t$  rad, με  $t \in [0, 2\pi]$ .

Την ίδια χρονική στιγμή,  $t$  sec, ένα άλλο σημείο B έχει διανύσει στον θετικό ημιάξονα Oy απόσταση  $OB = t$  cm.

Η ευθεία BA τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox στο σημείο  $\Gamma(\gamma, 0)$ .

Φέρουμε την BK και έστω  $\omega_1 = \widehat{BK\Gamma}$  rad και  $\omega_2 = \widehat{BK\Gamma}$  rad.



**ΤΕΛΟΣ 4<sup>ΗΣ</sup> ΣΕΛΙΔΑΣ**

ΑΡΧΗ 5<sup>ΗΣ</sup> ΣΕΛΙΔΑΣ

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι:

$$x'(t) = y(t) \quad \text{και} \quad y'(t) = 1 - x(t).$$

**μονάδες 6**

**Δ2.** Σε κάθε χρονική στιγμή  $t \text{ sec}$  :

α. να εκφράσετε την τετμημένη  $\gamma$  του σημείου  $\Gamma$  σε σχέση με τη γωνία  $t \text{ rad}$  και (3 μονάδες)

β. να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)$ . (3 μονάδες)

**μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\omega_2$ , ως προς το χρόνο  $t$ , σε κάθε χρονική στιγμή  $t \text{ sec}$ .

**μονάδες 6**

**Δ4.** Για μία συνάρτηση  $f$  γνωρίζουμε ότι:

$$(f'(x))^2 = 4\omega_1'(x)\omega_2'(x), \quad \text{για κάθε } x \in [0, 2\pi].$$

Να εξετάσετε, εξηγώντας πλήρως την απάντησή σας, αν η  $C_f$  έχει σημεία καμπής. Αν έχει, να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

**μονάδες 7**

----- \* \* \* -----