2η ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2020 – 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι

η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

«Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,0]$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ και $f(0)=2$, τότε $f((-\infty,0])=(-1,2]$.»

(μονάδα 1, για τον χαρακτηρισμό Σωστό / Λάθος
μονάδες 2, για την αιτιολόγηση)

μονάδες 3

Α3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της κάθε πρότασης και δίπλα τη λέξη **Σωστή**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)>f(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f'(x_0)<0$.

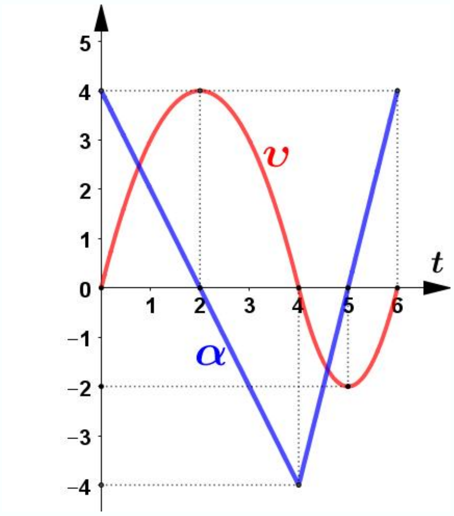
β. Αν $f: A\to\mathbb{R}$ και $g: B\to\mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις τέτοιες, ώστε $f(A)\cap B\neq\emptyset$, τότε ορίζεται πάντα η σύνθεση της g με την f.

γ. Αν $-1\le f(x)\le 2$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x\to0}\frac{f(x)(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}=0$.

δ. Αν η ευθεία (ε) είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε η (ε) και η C_f δεν έχουν κοινά σημεία κοντά στο $+\infty$.

μονάδες 8

Α4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της **ταχύτητας υ** και **της επιτάχυνσης α** ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση σε έναν προσανατολισμένο άξονα, σε σχέση με τον χρόνο t (min).



Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της κάθε πρότασης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α) Ποια χρονικά διαστήματα, το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά του άξονα κίνησης;

Α. $t \in (0,4)$ Β. $t \in (0,1) \cup (5,6)$

Γ. $t \in (0,2) \cup (4,5)$ Δ. $t \in (2,5)$

β) Ποια χρονικά διαστήματα, το κινητό εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση;

Α. $t \in (0,4)$ Β. $t \in (0,1) \cup (5,6)$

Γ. $t \in (0,2) \cup (4,5)$ Δ. $t \in (2,5)$

γ) Ποια χρονικά διαστήματα, το κινητό επιβραδύνει καθώς κινείται προς την αρνητική φορά του άξονα κίνησης;

Α. $t \in (5,6)$ Β. $t \in (0,1) \cup (5,6)$

Γ. $t \in (0,2) \cup (4,5)$ Δ. $t \in (4,5)$

δ) Αν η ταχύτητα του κινητού μετράται σε km/min, ποιο είναι το μέτρο της μέγιστης στιγμιαίας ταχύτητας του κινητού όταν αυτό κινείται κατά την αρνητική φορά του άξονα κίνησης;

Α. $\upsilon = 0 \;\; km/min$ Β. $\upsilon = 2 \;\; km/min$

Γ. $\upsilon = -2 \;\; km/min$ Δ. $\upsilon = 4 \;\; km/min$

μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με

$g(x) = lnx + 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{lnx}{ex} & , \quad αν\ x \in (0,1] \\ ln^2 x & , \quad αν\ x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

Β1. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

μονάδες 7

Έστω ότι $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-x} & , \quad αν\ x \in (-\infty, 1] \\ (x-1)^2 & , \quad αν\ x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}. Στη συνέχεια να ορίσετε την f^{-1} μόνο στην περίπτωση όπου $f(x) = (x-1)^2$, με $x \in (1, +\infty)$.

μονάδες 7

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

μονάδες 5

Β4. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(x - f(x+1)) \leq f^{-1}(g(x+1) - 1)$.

μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + συν(2x)$.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $[0, \pi]$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[0, \pi]$.

μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ εφάπτεται στη C_f σε άπειρα το πλήθος σημεία.

μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{f(x) - 1}$.

μονάδες 5

Γ4. Έστω $\alpha, \beta \in [2,3]$ τέτοια, ώστε:

$$\sigma\upsilon\nu^2 g(\alpha) - \sigma\upsilon\nu^2 g(\beta) < \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{2}, \quad \text{όπου } g(x) = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}.$$

Να εξετάσετε ποια από τις παρακάτω προτάσεις προκύπτει από την υπόθεση αυτή *(1 μονάδα)* αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας *(7 μονάδες)*.

α. $\alpha < \beta$ β. $\alpha = \beta$ γ. $\alpha > \beta$

δ. δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία για να συμπεράνουμε τη διάταξη των α, β.

μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

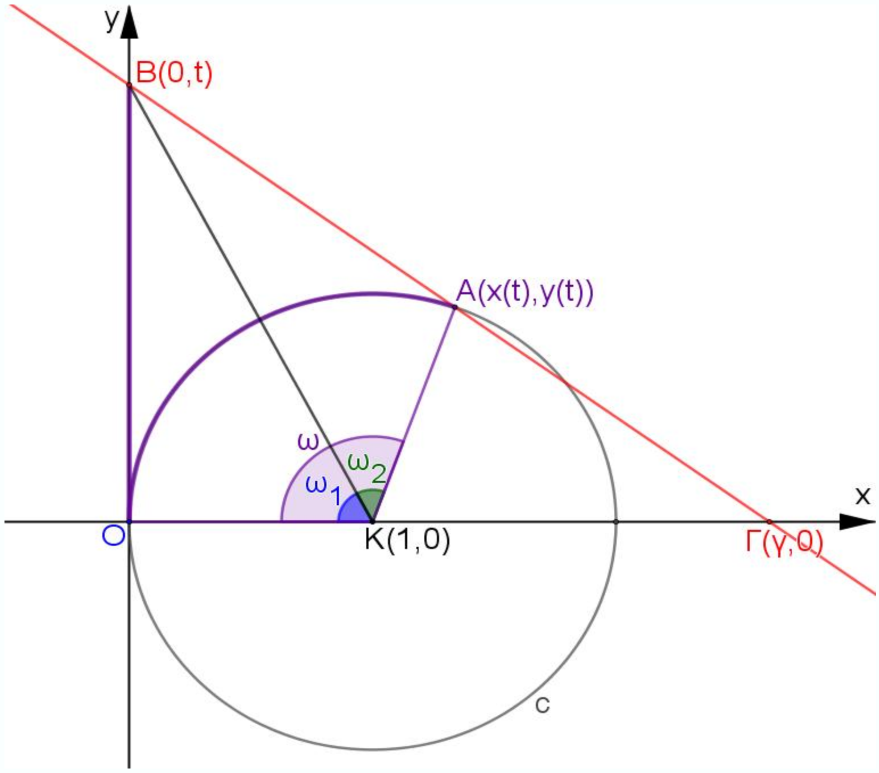
Ένα σημείο $A(x(t), y(t))$, κινείται πάνω στον κύκλο (c) με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $KO = 1$ cm, όπου $O(0,0)$.

Η αρχική θέση του σημείου A είναι το O και κάθε χρονική στιγμή t sec έχει διαγράψει επίκεντρη γωνία $\omega(t) = t$ rad, με $t \in [0, 2\pi]$.

Την ίδια χρονική στιγμή, t sec, ένα άλλο σημείο B έχει διανύσει στον θετικό ημιάξονα Oy απόσταση $OB = t$ cm.

Η ευθεία BA τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox στο σημείο $\Gamma(\gamma, 0)$.

Φέρουμε την BK και έστω $\omega_1 = \widehat{BKO}$ rad και $\omega_2 = \widehat{BKA}$ rad.



Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$x'(t) = y(t)$ και $y'(t) = 1 - x(t)$.

μονάδες 6

Δ2. Σε κάθε χρονική στιγμή $t\ sec$:

α. να εκφράσετε την τετμημένη γ του σημείου Γ σε σχέση με τη γωνία $t\ rad$ και *(3 μονάδες)*

β. να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{t \to 0} \gamma(t)$. *(3 μονάδες)*

μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω_2, ως προς το χρόνο t, σε κάθε χρονική στιγμή t sec.

μονάδες 6

Δ4. Για μία συνάρτηση f γνωρίζουμε ότι:

$(f'(x))^2 = 4\omega_1'(x)\omega_2'(x)$, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.

Να εξετάσετε, εξηγώντας πλήρως την απάντησή σας, αν η C_f έχει σημεία καμπής. Αν έχει, να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

μονάδες 7

------------- * * * -------------

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 116.

Α2. *«Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,0]$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ και $f(0)=2$, τότε $f((-\infty,0])=(-1,2]$.»*

Λάθος. *Θα έπρεπε επιπλέον να είναι γνησίως αύξουσα.*

Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1 & , \quad x<-1\\ 4x+2 & , \quad -1\le x\le 0\end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, $f(0)=2$ και $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)=-2$ δηλαδή f: συνεχής. Το $f(-1)=-2\notin(-1,2]$, άρα $f((-\infty,0])\neq(-1,2]$.

Α3.

α. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)>f(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f'(x_0)<0$.

Σωστή. *Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha,\beta]$, επομένως υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$: $f'(x_0)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<0$, αφού $f(\beta)-f(\alpha)<0$ και $\beta-\alpha>0$.*

β. Αν $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις τέτοιες, ώστε $f(A)\cap B\neq\emptyset$, τότε ορίζεται πάντα η σύνθεση της g με την f.

Λάθος. *Για να ορίζεται η $f\circ g$ πρέπει και αρκεί $g(B)\cap A\neq\emptyset$.*

γ. Αν $-1\le f(x)\le 2$ κοντά στο 0, τότε $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}=0$.

Σωστή. *Έχουμε όριο μηδενικής $\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0\right)$ επί φραγμένης ($|f(x)|<3$ κοντά στο 0).*

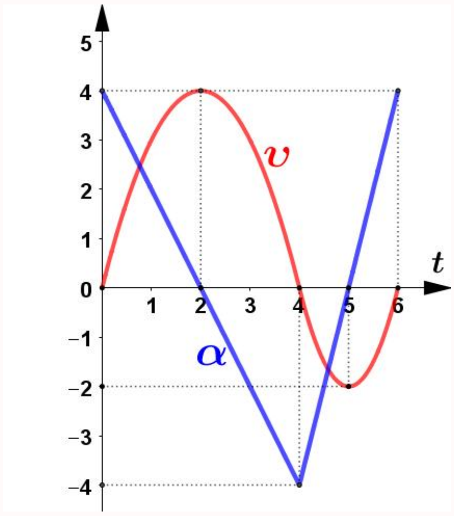
Είναι $\left|\frac{f(x)(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}\right|<3\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right| \Leftrightarrow -3\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right|<\frac{f(x)(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}<3\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right|$, με $\lim\limits_{x\to0}\left(3\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right|\right)=0$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}=0$.

δ. Αν η ευθεία (ε) είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε η (ε) και η C_f δεν έχουν κοινά σημεία κοντά στο $+\infty$.

Λάθος. *Αντιπαράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+\eta\mu\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}^*$.*

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$, άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ενώ έχει άπειρα κοινά σημεία με τη C_f κοντά στο $+\infty$, αφού η εξίσωση $f(x)=x\Leftrightarrow \eta\mu\frac{1}{x}=0$ έχει άπειρες λύσεις ως προς x κοντά στο $+\infty$.

Α4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της **ταχύτητας υ** και **της επιτάχυνσης α** ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση σε έναν προσανατολισμένο άξονα, σε σχέση με τον χρόνο t (min).



α) Ποια χρονικά διαστήματα, το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά του άξονα κίνησης;

Α. *Όταν* $\upsilon(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (0,4)$.

Α.	$\boldsymbol{t \in (0,4)}$	Β.	$t \in (0,1) \cup (5,6)$
Γ.	$t \in (0,2) \cup (4,5)$	Δ.	$t \in (2,5)$

β) Ποια χρονικά διαστήματα, το κινητό εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση;

Γ. *Όταν* $\upsilon(t) \cdot \alpha(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (0,2) \cup (4,5)$.

Α.	$t \in (0,4)$	Β.	$t \in (0,1) \cup (5,6)$
Γ.	$\boldsymbol{t \in (0,2) \cup (4,5)}$	Δ.	$t \in (2,5)$

γ) Ποια χρονικά διαστήματα, το κινητό επιβραδύνει καθώς κινείται προς την αρνητική φορά του άξονα κίνησης;

Α. *Όταν* $\upsilon(t) < 0$ *και* $\alpha(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (5,6)$.

Α.	$\boldsymbol{t \in (5,6)}$	Β.	$t \in (0,1) \cup (5,6)$
Γ.	$t \in (0,2) \cup (4,5)$	Δ.	$t \in (4,5)$

δ) Αν η ταχύτητα του κινητού μετράται σε km/min, ποιο είναι το μέτρο της μέγιστης στιγμιαίας ταχύτητας του κινητού όταν αυτό κινείται κατά την αρνητική φορά του άξονα κίνησης;

Β. *Για* $\upsilon < 0$: *ζητούμε το* $max\{|\upsilon|\}$. *Είναι* $max\{|\upsilon|\} = 2$.

Α.	$\upsilon = 0 \ \ km/min$	**Β.**	$\boldsymbol{\upsilon = 2 \ \ km/min}$
Γ.	$\upsilon = -2 \ \ km/min$	Δ.	$\upsilon = 4 \ \ km/min$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με

$g(x) = lnx + 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $f\big(g(x)\big) = \begin{cases} \frac{lnx}{ex} & , \ \alpha\nu \ x \in (0,1] \\ ln^2x & , \ \alpha\nu \ x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

B1. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

- Έστω $f\big(g(x)\big) = \frac{lnx}{ex}$, $x \in (0,1]$ και $g(x) = lnx + 1$, $x \in (0,+\infty)$.

  Για $x \in (0,+\infty)$ θέτω $u = lnx + 1 \Leftrightarrow x = e^{u-1} > 0$, $u \in \mathbb{R}$.

  Για $x \in (0,1]$: $lnx \leq 0 \Leftrightarrow lnx + 1 \leq 1 \Leftrightarrow u \leq 1$.

  Άρα για $u \in (-\infty, 1]$: $f(u) = \frac{u-1}{ee^{u-1}} = \frac{u-1}{e^u} = (u-1)e^{-u}$, δηλαδή

  $$f(x) = (x-1)e^{-x}, \text{ αν } x \in (-\infty, 1].$$

- Έστω $f\big(g(x)\big) = ln^2x$, $x \in (1,+\infty)$ και $g(x) = lnx + 1$, $x \in (0,+\infty)$.

  Για $x \in (0,+\infty)$ θέτω $u = lnx + 1 \Leftrightarrow lnx = u - 1$, $u \in \mathbb{R}$.

  Για $x \in (1,+\infty)$: $lnx > 0 \Leftrightarrow u - 1 > 0 \Leftrightarrow u > 1$.

  Άρα για $u \in (1,+\infty)$: $f(u) = (u-1)^2$, δηλαδή

  $$f(x) = (x-1)^2, \text{ αν } x \in (1,+\infty).$$

$$\textbf{Τελικά } \boldsymbol{f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-x} & , \ \text{αν } x \in (-\infty, 1] \\ (x-1)^2 & , \ \text{αν } x \in (1,+\infty) \end{cases}}.$$

B2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}. Στη συνέχεια να ορίσετε την f^{-1} μόνο στην περίπτωση όπου $f(x) = (x-1)^2$, με $x \in (1,+\infty)$.

- $x \in (-\infty, 1)$: $f'(x) = \cdots = (2-x)e^{-x} > 0$, αφού $2 - x > 1 > 0$ και $e^{-x} > 0$, για κάθε $x < 1$, άρα $f \nearrow (-\infty, 1)$.

- $x \in (1,+\infty)$: $f'(x) = 2(x-1) > 0$, για κάθε $x > 1$, άρα $f \nearrow (1,+\infty)$.

- Είναι $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$, άρα η f είναι συνεχής στο 1 οπότε $f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f: 1-1 \Rightarrow$ η f είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

  Έστω $\begin{cases} y = (x-1)^2 \\ x > 1 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{y} \\ x > 1 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} + 1 \\ x > 1 \\ y > 0 \end{cases}$ οπότε:

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1, \text{ με } x > 0.}$$

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

- $x \in (-\infty, 1)$: $f''(x) = \cdots = -(3-x)e^{-x} < 0$, αφού $3 - x > 2 > 0$ και $-e^{-x} < 0$, για κάθε $x < 1$,

  άρα $f \frown (-\infty, 1)$.

- $x \in (1, +\infty)$: $f''(x) = 2 > 0$,

  άρα $f \smile (1, +\infty)$.

Επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1, θα ελέγξουμε αν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο 1. Για το λόγο αυτό ελέγχουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη (*) στο 1.

(*) ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Εφαπτόμενη της C_f σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ υπάρχει και όταν η f δεν παραγωγίζεται στο x_0, αλλά ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ή $-\infty$ ή $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ή $-\infty$ (κατακόρυφη εφαπτομένη), όμως η περίπτωση αυτή είναι εκτός ύλης.

Είναι $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \cdots = 0$ και $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \cdots = \frac{1}{e}$.

Δηλαδή $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, άρα δεν υπάρχει το $f'(1)$, οπότε δεν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο 1, **επομένως η C_f δεν έχει σημεία καμπής**.

B4. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}\big(x - f(x+1)\big) \leq f^{-1}(g(x+1) - 1)$.

Για το σύνολο αναφοράς των λύσεων έχουμε τους επόμενους περιορισμούς:

$$\begin{cases} x+1 \in D_f \\ x - f(x+1) \in D_{f^{-1}} \\ x+1 \in D_g \\ g(x+1) - 1 \in D_{f^{-1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \in \mathbb{R} \\ x - f(x+1) \in \mathbb{R} \\ x+1 > 0 \\ g(x+1) - 1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x > -1.$$

Για $x > -1$ έχουμε διαδοχικά: $f^{-1}\big(x - f(x+1)\big) \leq f^{-1}(g(x+1) - 1) \overset{f \uparrow \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}$
$f\Big(f^{-1}\big(x - f(x+1)\big)\Big) \leq f\big(f^{-1}(g(x+1) - 1)\big) \Leftrightarrow x - f(x+1) \leq g(x+1) - 1 \Leftrightarrow$
$x + 1 - g(x+1) \leq f(x+1) \Leftrightarrow x - ln(x+1) \leq f(x+1)$ (1).

- Έστω $x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$. Επειδή $x > -1$, θα είναι $\boldsymbol{x \in (-1, 0]}$.

  Τότε $f(x+1) = (x+1-1)e^{-x-1} = xe^{-x-1}$, οπότε η (1) ισοδυνάμως γράφεται
  $\boldsymbol{x - ln(x+1)} \leq \boldsymbol{xe^{-x-1}}$ (2).

  Θεωρείται γνωστό ότι $lnu \leq u - 1$, για κάθε $u > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $u = 1$, οπότε για $u = x + 1 \Leftrightarrow x = u - 1 > -1$ θα είναι $\ln(x+1) \leq x \Leftrightarrow \boldsymbol{x - \ln(x+1) \geq 0}$, για κάθε $x \in (-1, 0]$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1 - 1 = 0$.

  Επίσης $\boldsymbol{xe^{-x-1} \leq 0}$, για κάθε $x \in (-1, 0]$, αφού $x \leq 0$ και $e^{-x-1} > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Είναι φανερό ότι **η (2) ισχύει αν και μόνο αν** ισχύει η ισότητα και στα δύο μέλη, δηλαδή αν και μόνο αν $\boldsymbol{x = 0}$.

- Έστω $x + 1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Επειδή $x > -1$, θα είναι $\boldsymbol{x \in (0, +\infty)}$.
  Τότε $f(x+1) = (x+1-1)^2 = x^2$, οπότε η (1) ισοδυνάμως γράφεται
  $\boldsymbol{x - \ln(x+1) \leq x^2}$ (3).
  Θεωρώ $h(x) = x^2 + \ln(x+1) - x$, $x \in [0, +\infty)$.
  Η h είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $[0, +\infty)$ με
  $h'(x) = 2x + \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{2x^2+x}{x+1} > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty) \Rightarrow h \nearrow [0, +\infty)$,
  άρα $h(x) > h(0)$, για κάθε $x \in (0, +\infty) \Leftrightarrow x^2 + \ln(x+1) - x > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty) \Leftrightarrow$ $x^2 > x - \ln(x+1)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$,
  δηλαδή **η (3) ισχύει αν και μόνο αν** $\boldsymbol{x \in (0, +\infty)}$.

Τελικά, η δοσμένη ανίσωση ισχύει αν και μόνο αν $\boldsymbol{x \in [0, +\infty)}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + συν(2x)$.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $[0, π]$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[0, π]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $[0, \pi]$ με
$f'(x) = 1 - 2ημ(2x)$. Έστω $f'(x) = 0 \Leftrightarrow ημ(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}$ ή $x = \frac{5\pi}{12}$.
Εφόσον η f' είναι συνεχής, τα πρόσημά της βρίσκονται από τον παρακάτω πίνακα.
Από τον ίδιο πίνακα μπορούμε να βρούμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π
επιλεγμένος αριθμός x_0		0		$\frac{\pi}{6}$		π	
$f'(x_0)$		1		$1-\sqrt{3}$		1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ.Μ.

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι $\boldsymbol{f \nearrow \left[0, \frac{\pi}{12}\right]}$, $\boldsymbol{f \searrow \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]}$, $\boldsymbol{f \nearrow \left[\frac{5\pi}{12}, \pi\right]}$.

Τα $f(0) = 1$ και $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12}$ είναι τοπικά ελάχιστα ενώ
τα $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{12}$ και $f(\pi) = \pi + 1$ είναι τοπικά μέγιστα.
Για να βρούμε το σύνολο τιμών της f στο $[0, \pi]$ χρειάζεται να γνωρίζουμε το ολικό ελάχιστο και το ολικό μέγιστο.

Επειδή η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα θα είναι το ολικό ελάχιστο ενώ το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα θα είναι το ολικό μέγιστο.

Για να βρούμε το ολικό ελάχιστο θα βρούμε το πρόσημο του $f(0)-f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{12-5\pi+6\sqrt{3}}{12}$.
Είναι $\pi<\frac{7}{2}\Rightarrow 5\pi<\frac{35}{2}\Rightarrow -5\pi>-\frac{35}{2}$ (1).
Επίσης $\sqrt{3}>1\Rightarrow 6\sqrt{3}>6\Rightarrow 12+6\sqrt{3}>18$ (2).
Από (1), (2) $\overset{(+)}{\Rightarrow}$ $12-5\pi+6\sqrt{3}>\frac{1}{2}>0$, άρα $f(0)>f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, οπότε
το ολικό ελάχιστο είναι το $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{12}$.
Για να βρούμε το ολικό μέγιστο θα βρούμε το πρόσημο του
$f\left(\frac{\pi}{12}\right)-f(\pi)=\frac{-11\pi+6(\sqrt{3}-2)}{12}$. Είναι $-11\pi<0$ και $6(\sqrt{3}-2)<0$, οπότε
$\frac{-11\pi+6(\sqrt{3}-2)}{12}<0$, άρα $f\left(\frac{\pi}{12}\right)<f(\pi)$, οπότε
το ολικό μέγιστο είναι το $f(\pi)=\pi+1$.

Επομένως, **το σύνολο τιμών της f είναι το $f([0,\pi])=\left[\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{12},\pi+1\right]$.**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=x+1$ εφάπτεται στη C_f σε άπειρα το πλήθος σημεία.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της (ε) με την C_f λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y \Leftrightarrow x+\sigma\upsilon\nu(2x)=x+1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2x)=1 \Leftrightarrow 2x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Προφανώς υπάρχουν άπειρα κοινά σημεία $A_k(k\pi,k\pi+1)$, $k\in\mathbb{Z}$. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f σε οποιοδήποτε από αυτά είναι $y-k\pi-1=f'(k\pi)(x-k\pi),\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$y=\big(1-2\eta\mu(2k\pi)\big)(x-k\pi)+k\pi+1, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$y=x-k\pi+k\pi+1, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow y=x+1,\ k\in\mathbb{Z}$.

Άρα η (ε) εφάπτεται σε όλα τα σημεία $A_k(k\pi,k\pi+1)$, $k\in\mathbb{Z}$, τα οποία είναι άπειρα το πλήθος.

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{f(x)-1}$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{f(x)-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{x+\sigma\upsilon\nu(2x)}{x+\sigma\upsilon\nu(2x)-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{1+\frac{\sigma\upsilon\nu(2x)}{x}}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu(2x)-1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1+\frac{\sigma\upsilon\nu(2x)}{x}}{1+2\frac{\sigma\upsilon\nu(2x)-1}{2x}}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\sigma\upsilon\nu(2x)=1$, άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu(2x)}{x}=+\infty$.
Επίσης $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu(2x)-1}{2x}\underset{u\to0^+}{\overset{u=2x}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=0$, οπότε

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1+\frac{\sigma\upsilon\nu(2x)}{x}}{1+2\frac{\sigma\upsilon\nu(2x)-1}{2x}}=\left(\frac{1+(+\infty)}{1+2\cdot0}\right)=+\infty.$$

Γ4. Έστω $\alpha,\beta \in [2,3]$ τέτοια, ώστε:

$$\sigma\upsilon\nu^2 g(\alpha) - \sigma\upsilon\nu^2 g(\beta) < \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{2}, \text{ όπου } g(x) = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}.$$

Να εξετάσετε ποια από τις παρακάτω προτάσεις προκύπτει από την υπόθεση αυτή *(1 μονάδα)* αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας *(7 μονάδες)*.

α. $\alpha < \beta$ β. $\alpha = \beta$ γ. $\alpha > \beta$

δ. δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία για να συμπεράνουμε τη διάταξη των α,β.

Σωστή απάντηση είναι το **γ.** $\alpha > \beta$.

εξήγηση

Η δοσμένη σχέση γράφεται ισοδύναμα

$\sigma\upsilon\nu^2 g(\alpha) - \sigma\upsilon\nu^2 g(\beta) < \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{2}$, με $\alpha,\beta \in [2,3] \Leftrightarrow$

$\frac{1+\sigma\upsilon\nu(2g(\alpha))}{2} - \frac{1+\sigma\upsilon\nu(2g(\beta))}{2} < \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{2}$, με $\alpha,\beta \in [2,3] \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu(2g(\alpha)) + g(\alpha) < \sigma\upsilon\nu(2g(\beta)) + g(\beta)$, με $\alpha,\beta \in [2,3] \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{f(g(\alpha)) < f(g(\beta))}$ **, με** $\boldsymbol{\alpha,\beta \in [2,3]}$ **(1).**

Είναι $g(x) = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} = \frac{27}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ με $g\searrow\mathbb{R}$, αφού $\frac{27}{4} > 0$ και $0 < \frac{2}{3} < 1$. Επιπλέον η g είναι συνεχής οπότε $g([2,3]) = [g(3), g(2)] = [2,3]$.

Δηλαδή όταν $\boldsymbol{\alpha,\beta \in [2,3]}$ τότε και $\boldsymbol{g(\alpha), g(\beta) \in [2,3]}$.

Είναι $\pi < 4 \Rightarrow 5\pi < 20 \Rightarrow \frac{5\pi}{12} < \frac{20}{12} < \frac{24}{12} = 2 < 3 < \pi$.

Άρα $[2,3] \subset \left[\frac{5\pi}{12}, \pi\right]$ και επειδή $f\nearrow\left[\frac{5\pi}{12}, \pi\right] \Rightarrow f\nearrow[2,3]$

Επομένως από (1) $\xRightarrow{f\uparrow[2,3]} g(\alpha) < g(\beta)$, με $\alpha,\beta \in [2,3] \xRightarrow{g\downarrow[2,3]} \boldsymbol{\alpha > \beta}$.

ΘΕΜΑ Δ

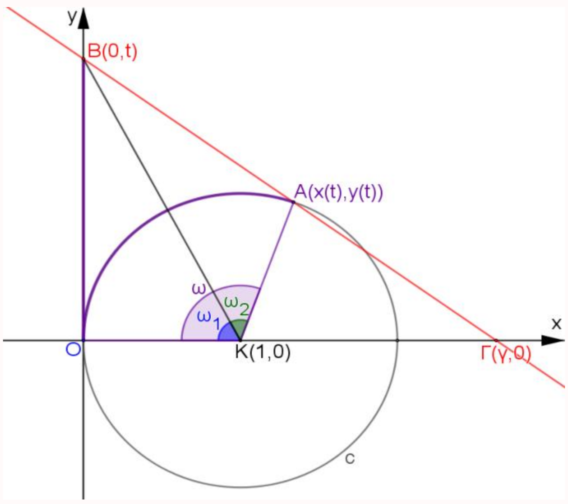
Ένα σημείο $A(x(t), y(t))$, κινείται πάνω στον κύκλο (c) με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα KO, όπου $O(0,0)$.

Η αρχική θέση του σημείου A είναι το O και κάθε χρονική στιγμή t sec έχει διαγράψει επίκεντρη γωνία $\omega(t) = t$ rad, με $t \in [0, 2\pi]$.

Την ίδια χρονική στιγμή, t sec, ένα άλλο σημείο B έχει διανύσει στον θετικό ημιάξονα Oy απόσταση $OB = t$ cm.

Η ευθεία BA τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox στο σημείο $\Gamma(\gamma, 0)$.

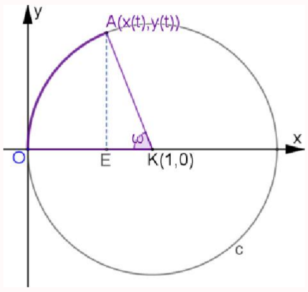
Φέρουμε την BK και έστω $\omega_1 = \widehat{BKO}$ και $\omega_2 = \widehat{BKA}$.



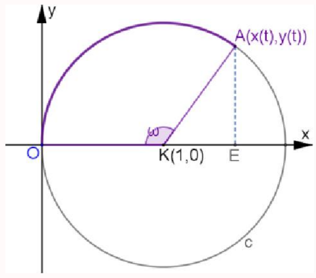
Δ1. Να αποδείξετε ότι: $x'(t) = y(t)$ και $y'(t) = 1 - x(t)$.

Η ακτίνα του κύκλου είναι $R = 1$.

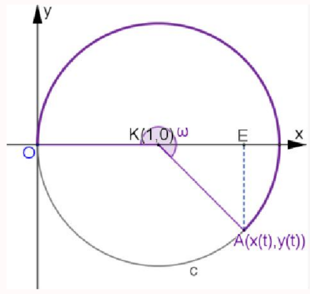
Έστω $AE \perp Ox$.



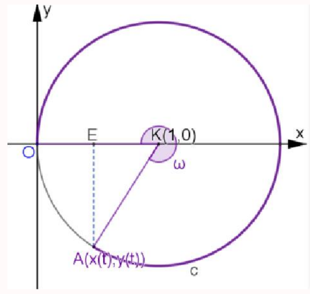
σχήμα 1



σχήμα 2



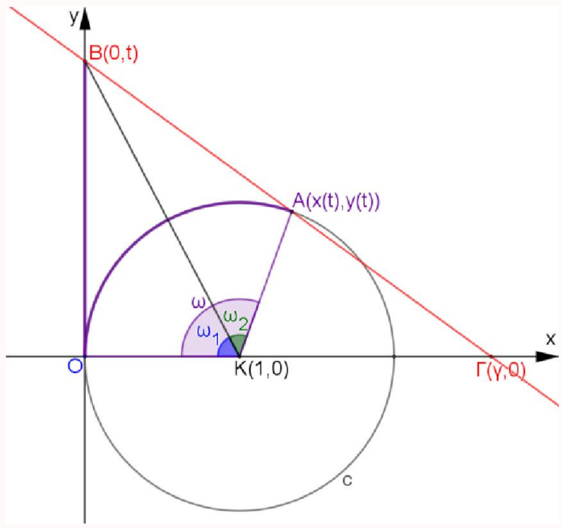
σχήμα 3



σχήμα 4

- Αν $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, (σχήμα 1): $x(t) = OE = OK - EK = 1 - 1\sigma\upsilon\nu\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu t$,
  $y(t) = AE = \eta\mu\omega = \eta\mu t$.
- Αν $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, (σχήμα 2): $x(t) = OE = OK + KE = 1 + 1\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega)$
  $= 1 - 1\sigma\upsilon\nu\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu t$,
  $y(t) = AE = \eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega = \eta\mu t$.
- Αν $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, (σχήμα 3): $x(t) = OE = OK + KE = 1 + 1\sigma\upsilon\nu(\omega - \pi)$
  $= 1 + 1\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu t$,
  $y(t) = -AE = -\eta\mu(\omega - \pi) = \eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega = \eta\mu t$.
- Αν $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, (σχήμα 4): $x(t) = OE = OK - KE = 1 - 1\sigma\upsilon\nu(2\pi - \omega)$
  $= 1 - 1\sigma\upsilon\nu\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu t$,
  $y(t) = -AE = -\eta\mu(2\pi - \omega) = \eta\mu\omega = \eta\mu t$.

Σε κάθε περίπτωση βλέπουμε ότι ισχύει:
$x(t) = 1 - \sigma\upsilon\nu t$ και $y(t) = \eta\mu t$, για κάθε $t \in [0, 2\pi]$.
Επομένως, $\boldsymbol{x'(t) = \eta\mu t = y(t)}$ και $\boldsymbol{y'(t) = \sigma\upsilon\nu t = 1 - x(t)}$.



Δ2. Σε κάθε χρονική στιγμή t *sec*, με $t \in (0, 2\pi]$:

α. να εκφράσετε την τετμημένη γ του σημείου Γ σε σχέση με τη γωνία t rad και

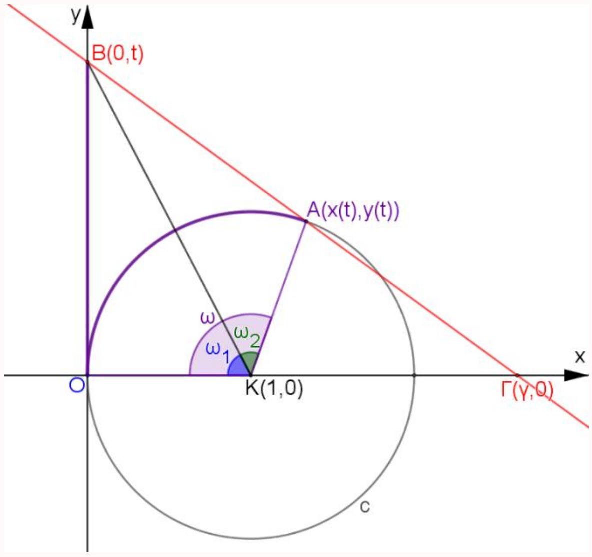
β. να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{t \to 0} \gamma(t)$.

α. Είναι $B(0, t)$, $A(1 - \sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t)$, $\Gamma(\gamma, 0)$, $M(\mu_1, \mu_2)$.
$\overrightarrow{BA} = (1 - \sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t - t)$ και
$\overrightarrow{B\Gamma} = (\gamma, -t)$.

Τα σημεία B, A, Γ είναι συνευθειακά $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \sigma\upsilon\nu t & \eta\mu t - t \\ \gamma & -t \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \gamma = \frac{t(\sigma\upsilon\nu t - 1)}{\eta\mu t - t}$, αφού $\eta\mu t < t$, αν $t > 0$.

β. $\boldsymbol{\lim\limits_{t \to 0} \gamma(t)} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t(\sigma\upsilon\nu t - 1)}{\eta\mu t - t} \underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \cdots \underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \cdots \underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \cdots = \boldsymbol{3}$.



Δ3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω_2, ως προς το χρόνο t, σε κάθε χρονική στιγμή t sec.

Ζητούμε το $\boldsymbol{\omega_2'(t)}$.

Σε κάθε χρονική στιγμή t sec είναι $\omega(t) = \omega_1(t) + \omega_2(t) \Rightarrow \omega_2(t) = \omega(t) - \omega_1(t) \Rightarrow \omega_2(t) = t - \omega_1(t) \Rightarrow$

$\omega_2'(t) = (t)' - \omega_1'(t) \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2'(t) = 1 - \omega_1'(t)}$ $\quad$ (1).

Στο τρίγωνο ΒΟΚ: $\varepsilon\varphi(\omega_1(t)) = \frac{OB}{OK} = \frac{t}{1} = t \Rightarrow \left(\varepsilon\varphi(\omega_1(t))\right)' = (t)' \Rightarrow \frac{\omega_1'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega_1(t))} = 1 \Rightarrow \frac{\omega_1'(t)}{\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2(\omega_1(t))}} = 1 \Rightarrow \omega_1'(t)\left(1 + \varepsilon\varphi^2(\omega_1(t))\right) = 1 \Rightarrow \omega_1'(t)(1+t^2) = 1 \Rightarrow$

$\boldsymbol{\omega_1'(t) = \frac{1}{1+t^2}}$ $\quad$ (2).

Από (1) $\overset{(2)}{\Rightarrow} \omega_2'(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2'(t) = \frac{t^2}{1+t^2}}$.

Δ4. Για μία συνάρτηση f γνωρίζουμε ότι:
$(f'(x))^2 = 4\omega_1'(x)\omega_2'(x)$, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.
Να εξετάσετε, εξηγώντας πλήρως την απάντησή σας, αν η C_f έχει σημεία καμπής. Αν έχει, να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

Είναι $\omega_1'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ και $\omega_2'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, με $x \in [0, 2\pi]$.

Οπότε $(f'(x))^2 = 4\omega_1'(x)\omega_2'(x)$, για κάθε $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow$

$(f'(x))^2 = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2$, για κάθε $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow$

$|f'(x)| = \frac{2x}{1+x^2}$, για κάθε $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow$

Για κάθε $x \in [0, 2\pi]$: $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ή $f'(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$.

Βλέπουμε ότι $f'(0) = 0$ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, 2\pi]$.

Η συνάρτηση $g(x) = (f'(x))^2 = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2$, $x \in [0, 2\pi]$, είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2\pi]$ με $g'(x) = 2f'(x)f''(x)$, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$, δηλαδή υπάρχει η f'', οπότε η f' είναι συνεχής και μη μηδενιζόμενη στο $(0, 2\pi]$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, 2\pi]$, δηλαδή

ή $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, 2\pi]$, ή $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, 2\pi]$. Άρα

ή $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ ή $f'(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε:

ή $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$

ή $f''(x) = -\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.

Τα πρόσημα της f'' σε κάθε περίπτωση φαίνονται στους επόμενους πίνακες:

- $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$

x	0		1		2π
$f''(x)$		+	0	−	

- $f''(x) = -\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$

x	0		1		2π
$f''(x)$		−	0	+	

Οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι τα σημεία του $(0, 2\pi)$ στα οποία μηδενίζεται η f'' ή δεν υπάρχει η f''. Επειδή η f'' ορίζεται σε όλο το $[0, 2\pi]$, οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι μόνο τα σημεία του $(0, 2\pi)$ στα οποία μηδενίζεται η f''. Αν, επιπλέον, η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν ενός τέτοιου σημείου, τότε το σημείο αυτό είναι θέση σημείου καμπής της C_f. Από τον πίνακα προσήμων της f'' σε κάθε περίπτωση βλέπουμε ότι $f''(1) = 0$, $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, 2\pi)$ και η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1.

Άρα το 1 είναι η μοναδική θέση σημείου καμπής της C_f.

-------------- * * * --------------