

ΑΡΧΗ 1^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ3^η ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ: 2020 – 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.
μονάδες 4

A2. Να αποδείξετε ότι:
Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$.
μονάδες 7

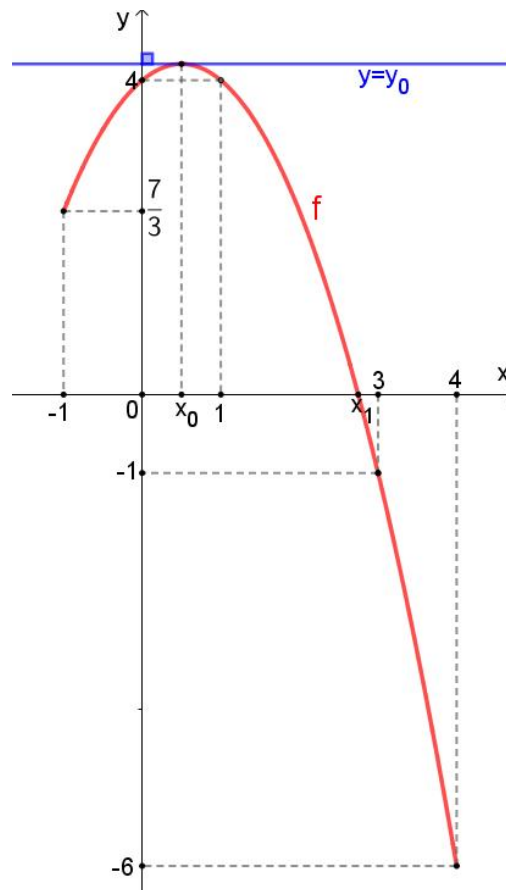
A3. Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι $1 - 1$, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$, όταν ορίζεται, είναι $1 - 1$.

(μονάδα 1, για τον χαρακτηρισμό Σωστό / Λάθος
μονάδες 3, για την αιτιολόγηση)

μονάδες 4

A4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Η ευθεία $y = y_0$ εφάπτεται στη C_f στο x_0 , η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο x_1 και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1, 4]$.
Να γράψετε στο απαντητικό σας φύλλο τον αριθμό της κάθε πρότασης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΑΡΧΗ 2^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ

- Για την f στο $[1,3]$ δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις για το θεώρημα

A. Bolzano	B. Rolle
Γ. Μέσης Τιμής	Δ. Μέγιστης Ελάχιστης Τιμής
- Το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ είναι το

A. $[-1,4]$	B. $[0,3]$	Γ. $[-1,0] \cup [1,3]$	Δ. $[-1,0] \cup [1,4]$
-------------	------------	------------------------	------------------------
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(f(1))}{f(x) - f(x_0)} =$

A. $-\frac{3}{2}$	B. $+\infty$	Γ. $-\infty$	Δ. 0
-------------------	--------------	--------------	------
- Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λάθος;

A. Υπάρχει $\xi \in (0,4)$: $f'(\xi) = -2,5$.
B. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2$ έχει μοναδική ρίζα στο $[1,3]$.
Γ. $\lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{\eta\mu x - x}{f(x)} = +\infty$.
Δ. $f'(x_0) = f(x_1)$.
- Ο ρυθμός μεταβολής της f μεγιστοποιείται στο

A. -1	B. x_0	Γ. x_1	Δ. 4
---------	----------	----------	------

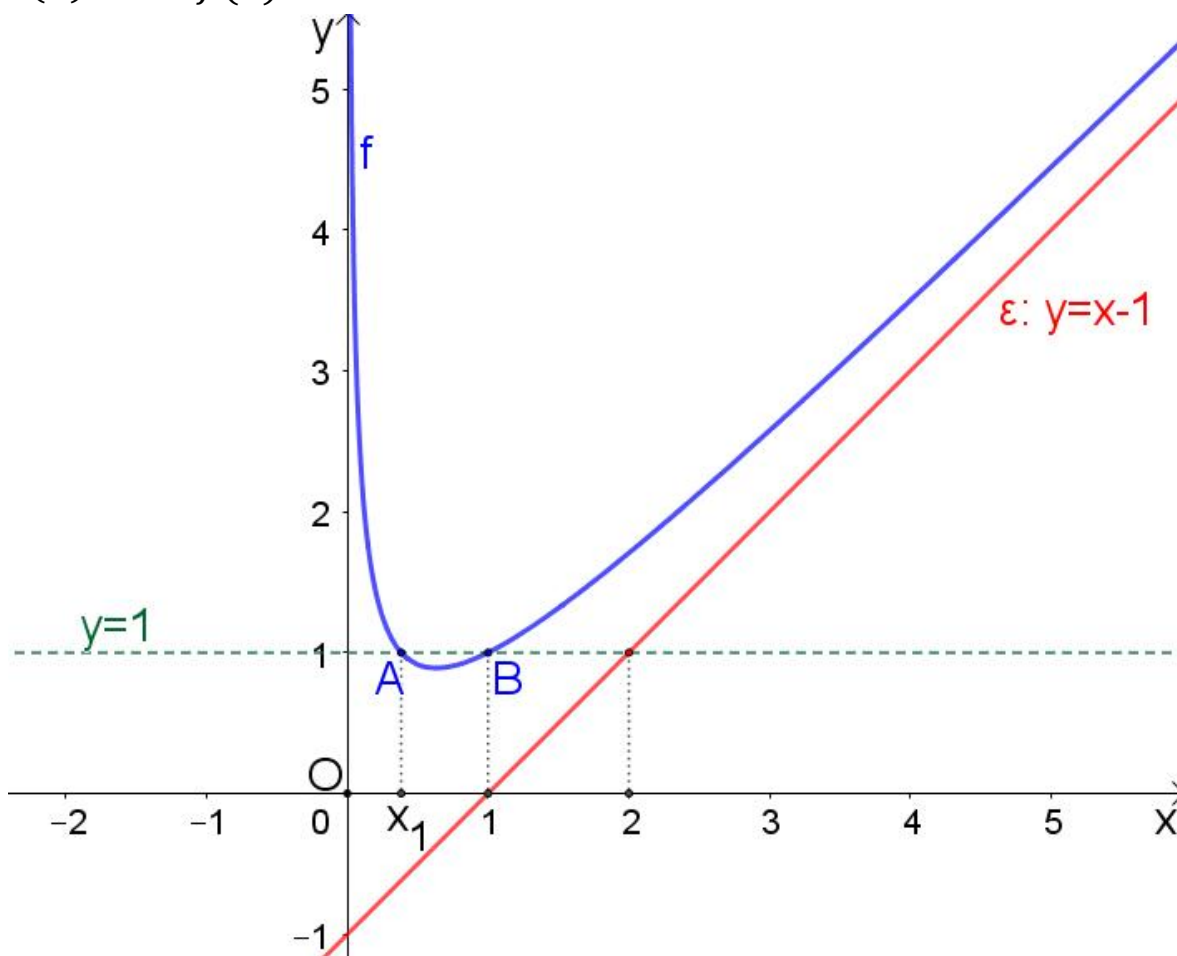
μονάδες 10**ΤΕΛΟΣ 2^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ**

ΘΕΜΑ Β

Η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης και κυρτής συνάρτησης f , για την οποία υπάρχει η παράγωγος κάθε τάξης, φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Η ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και ο άξονας y' είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Θεωρούμε επίσης και τις συναρτήσεις g, h με $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ και $h(x) = x \cdot f(x)$.



B1. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot g(x) - 1}{\eta \mu \frac{1}{x}}$.

μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_h στο σημείο της, $\Gamma(x_0, h(x_0))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

μονάδες 7

ΑΡΧΗ 4^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ

B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g .

[οι αριθμοί x_0 και $f(x_0)$ θεωρούνται γνωστοί].

μονάδες 6

B4. Να αποδείξετε ότι η C_g τέμνει την ευθεία (ε) ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη $\xi \in (1, 2)$.

μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{e^x - x}$, για κάθε $x \in A$, όπου A είναι το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο μπορεί να οριστεί η f .

Δίνεται επίσης η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση g με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία γνωρίζουμε ότι: $xg'(x) \geq f^2(x) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε το σύνολο A .

μονάδες 3

Γ2. Να αποδείξετε υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_0, f(x_0))$, με $x_0 < 0$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f στο M να την διαπερνά.

μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α. $g'(0) = 0,$

(3 μονάδες)

β. $g''(0) \geq \frac{1}{2}.$

(6 μονάδες)

μονάδες 9

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g' σε ένα, τουλάχιστον, σημείο της, $K(\kappa, g'(\kappa))$, με $\kappa \in [0, 1)$, διέρχεται από το σημείο $B(1, f''(\kappa) + g'(\kappa))$.

μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Για την συνάρτηση $x(t) = \alpha t(t - 2)$, $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, γνωρίζουμε ότι: $x(t) \leq 4$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

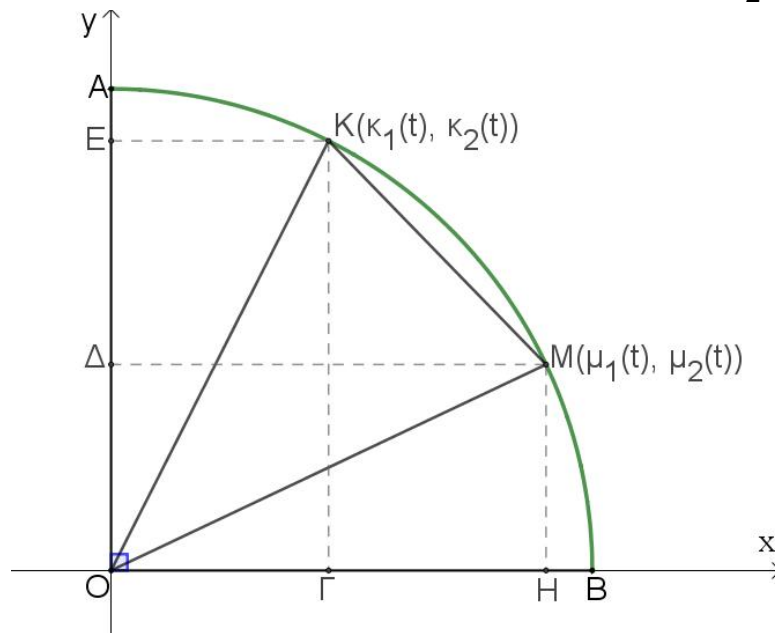
Δ1. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

μονάδες 5

Έστω ότι $\alpha = -4$.

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με μονάδα το 1 cm, θεωρούμε το τεταρτοκύκλιο \widehat{AB} του κύκλου $c: x^2 + y^2 = 16$ με $x, y > 0$.

Δύο σημεία $M(\mu_1, \mu_2)$, με $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ και $K(\kappa_1, \kappa_2)$, με $\kappa_1, \kappa_2 \geq 0$, κινούνται πάνω στο τεταρτοκύκλιο \widehat{AB} ώστε, σε κάθε χρονική στιγμή t min, να είναι $\mu_1(t) = x(t)$ και $\kappa_1(t) = \frac{x(t)}{2}$.



Δ2. Να βρείτε:

α. τη χρονική διάρκεια της κίνησης του σημείου K ,

(2 μονάδες)

β. το είδος (επιταχυνόμενη, επιβραδυνόμενη) και τη φορά (θετική, αρνητική) της κίνησης της προβολής $\Gamma(\kappa_1(t), 0)$ του σημείου K πάνω στον άξονα $x'x$ σε όλη τη χρονική διάρκεια της κίνησης του σημείου K ,

(4 μονάδες)

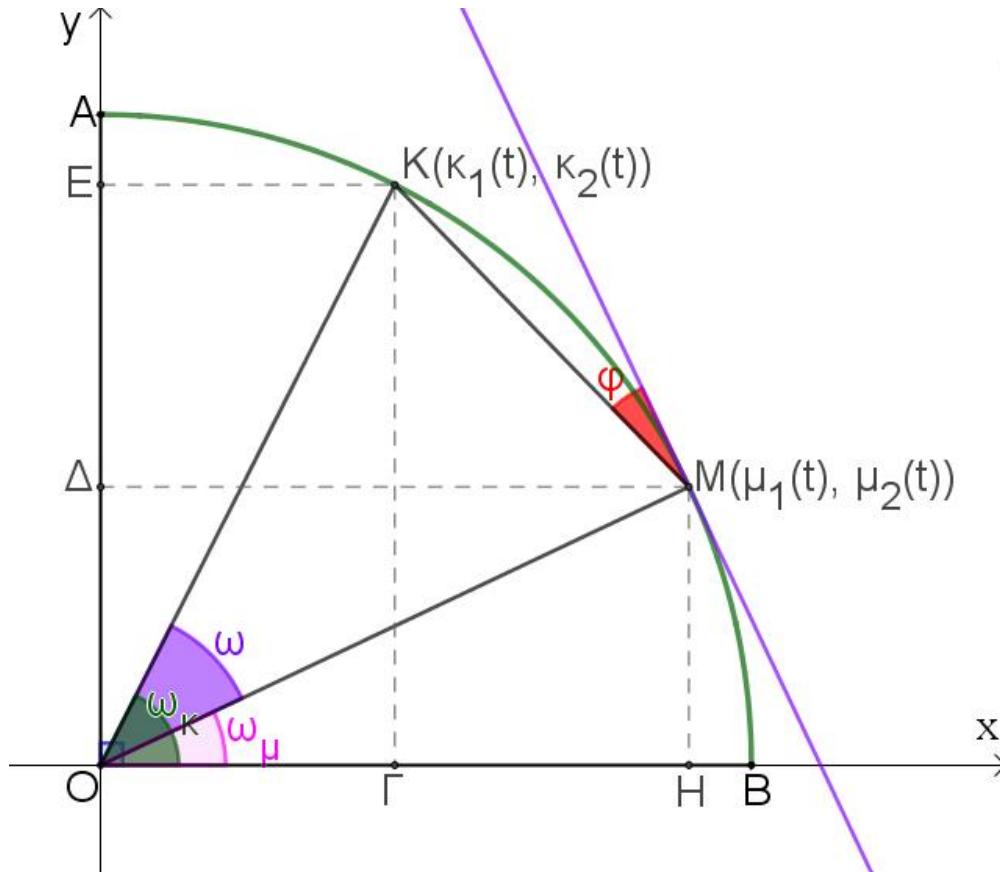
γ. το συνολικό διάστημα (σε cm) που διάνυσε το σημείο K .

(3 μονάδες)

μονάδες 9

ΑΡΧΗ 6^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ

Έστω (ε) : η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M και
 φ : η οξεία γωνία που σχηματίζει η (ε) με τη χορδή KM στο
σημείο M , όπως φαίνονται στο επόμενο σχήμα.
Έστω επίσης ω , ω_K , ω_M : οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στα
τόξα \widehat{KM} , \widehat{KB} , \widehat{MB} αντίστοιχα.



Δ3. Να αποδείξετε ότι:

α. $\omega = 2\varphi$,

(1 μονάδα)

β. $\omega'_K(t) = -\frac{\kappa'_1(t)}{\kappa_2(t)}$.

(5 μονάδες)

μονάδες 6

Θεωρείστε γνωστό ότι: $\omega'_M(t) = -\frac{\mu'_1(t)}{\mu_2(t)}$.

Δ4. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η γωνία φ , αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

μονάδες 5

----- * * * -----