Επαναληπτικό Διαγώνισμα στο 1ο Κεφάλαιο

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f(x), η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν :

- η f(x) είναι συνεχής στο [α , β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o) = \eta$

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό .

« Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [α, β] είναι και συνεχής στα άκρα α ,β.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή με το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α).

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α, β] και συνεχής στο (α, β] , τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α, β] μια μέγιστη τιμή.

β. Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι

$f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.

γ. Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty$,τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_o.

δ. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = +\infty$

ε. Ισχύει : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{συν}x - 1}{x} = 1$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$

Β1. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$

Μονάδες 5

Β2. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$, $0 < x \neq e$, να δείξετε ότι :

α) η γραφική παράσταση της φ έχει με την ευθεία y=x ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(\frac{1}{e}, 1)$

Μονάδες 6

β) η φ αντιστρέφεται και να οριστεί η φ^{-1} .

Μονάδες 8

Β3. Αν $\varphi^{-1}(x) = e^{f(x)}$, $x \neq 1$, να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

$$A = \lim_{x \to +\infty} \varphi^{-1}(x) \qquad\qquad B = \lim_{x \to 1^-} \varphi^{-1}(x)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{1-x} - x + \lambda , & x < 1 \\ \ln x - \frac{1}{x} + e^{\lambda} , & x \geq 1 \end{cases}$, $x \in R$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f(x).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει ακριβώς δυο ρίζες .

Μονάδες 4

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση :

$$\frac{e^{f(\alpha)}-1}{x-1}+\frac{\ln\,(f(\beta)+1)}{x-2}=0 \ \ , \ \alpha\,,\beta \in R\text{-}\{1\}$$

έχει μοναδική ρίζα στο (1,2).

Μονάδες 6

Γ5. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ , λ έτσι ώστε να ισχύει :

$$f(e^{\kappa}-1)+f(\ln\lambda)=0$$

Μονάδες 4

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύουν :

- $x^2f^2(x)+1=x^2e^{2x}$ - $2xf(x)$, $x>0$
- $f(1)$ =e-1

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f(x) είναι :

$$f(x)=e^x-\frac{1}{x}\,,\,x>0$$

Μονάδες 8

Δ2. Να δείξετε ότι η f(x) αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

$f^{-1}(x)$.

Μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση :

$$f^{-1}(e^x-\frac{1}{x}+e-2)=1\ ,\ x\neq 0$$

έχει μοναδική ρίζα ρ στο διάστημα ($\frac{1}{2}$,1).

Μονάδες 4

Δ4. Να βρεθεί το παρακάτω όριο :

$$K=\lim_{x\to\rho^-}\frac{\eta\mu x-x}{f(x)-1}$$

Μονάδες 5

Δ5. Αν $g(x) = (f(x)\text{-}1)^2(x\text{-}1)^4$, $x\in[\rho,1]$,να δείξετε ότι η g(x) παίρνει μέγιστη τιμή στο διάστημα (ρ, 1), όπου ρ η ρίζα του ερωτήματος Δ3.

Μονάδες 4

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει . Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή .

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΑΛΑΜΑΝΗΣ, μαθηματικός 3ου ΓΕΛ Γιαννιτσών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

από τον επιμελητή του

I like maths

Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω !

Ιορδάνη Χ. Κοσόγλου, Msc μαθηματικό ΓΕΛ Εξαπλατάνου

την Κυριακή 12/12/21 κατά το μεσημεράκι !