3ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: 1ο Κεφάλαιο

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

7 μονάδες

Α2. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

4 μονάδες

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

4 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Δύο συναρτήσεις f,g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x\in\mathrm{A}$ ισχύει $f(x)=g(x)$

β. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$

γ. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu}}=-\infty$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

δ. Αν f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m

ε. Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$

10 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x}}$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$, $x<0$

7 μονάδες

Β2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ f^{-1}$

6 μονάδες

Αν $h(x)=\frac{x-1}{x}$, $x<0$, τότε:

Β3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της h (3 μονάδες) και να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$ (4 μονάδες)

7 μονάδες

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right)$

5 μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+x & , \ x<1 \\ x^2+\alpha & , \ x\geq 1 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

3 μονάδες

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

6 μονάδες

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(-\infty,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$

6 μονάδες

Γ4. Έστω $g:[1,2]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$g^2(x)=3x-1-f(x) \text{ , για κάθε } x\in[1,2]$$

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $g(x)=0$ και να αποδείξετε ότι η g διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(1,2)$

5 μονάδες

β. Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της g ;

5 μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\sqrt{x+1}}{\eta\mu x}=0$$

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$ (3 μονάδες) και στη συνέχεια να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\eta\mu 3x}$ (3 μονάδες)

6 μονάδες

Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι για τη συνάρτηση f ισχύει η σχέση:

$$f^2(x)=1+2xf(x) \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

6 μονάδες

Δ3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)\cdot f(x)\right]$

6 μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(x-1)-x}{x-\kappa}+\frac{f(x)-x}{x-\kappa-1}=0 \ , \ \kappa\in\mathbb{R}-\{1\}$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\kappa,\kappa+1)$

7 μονάδες

Θανάσης Κοπάδης Μαθηματικός - Συγγραφέας