ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 3ου ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

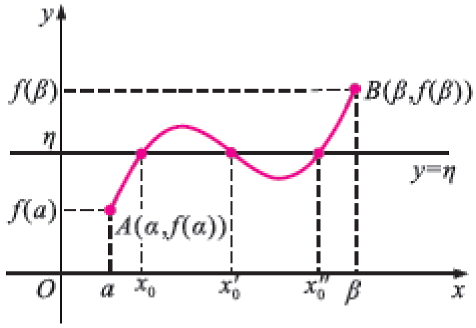
Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Αν: • η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και

• $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta,\ x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y=f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,f(x))$, $x\in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

Α3. Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

Α4. **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Λάθος

δ. Σωστό **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1, x_2 \in A = (1, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-\sqrt{x_1}} = \dfrac{1}{1-\sqrt{x_2}}$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{x_1} = 1-\sqrt{x_2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x_1} = -\sqrt{x_2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$, άρα ορίζεται η f^{-1}

Για $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow -\sqrt{x} < -1 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$

Άρα, $f(A) = (-\infty, 0)$

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, οπότε $A_{f^{-1}} = (-\infty, 0)$

Για $x \in (1, +\infty)$, $y \in (-\infty, 0)$ είναι: $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} = y \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{y} = \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{y-1}{y} = \sqrt{x} \Leftrightarrow \left(\frac{y-1}{y}\right)^2 = x$$

Άρα, $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2, \quad x \in (-\infty, 0)$

Β2. Για να ορίζεται η $g \circ f^{-1}$ πρέπει $x \in A_{f^{-1}} = (-\infty, 0)$ και $f^{-1}(x) \in A_g = [0, +\infty)$

Δηλαδή, $\begin{cases} x \in (-\infty, 0) \\ f^{-1}(x) \in [0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ f^{-1}(x) \geq 0 \text{ που ισχύει} \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$

Άρα, $A_{g \circ f^{-1}} = (-\infty, 0)$

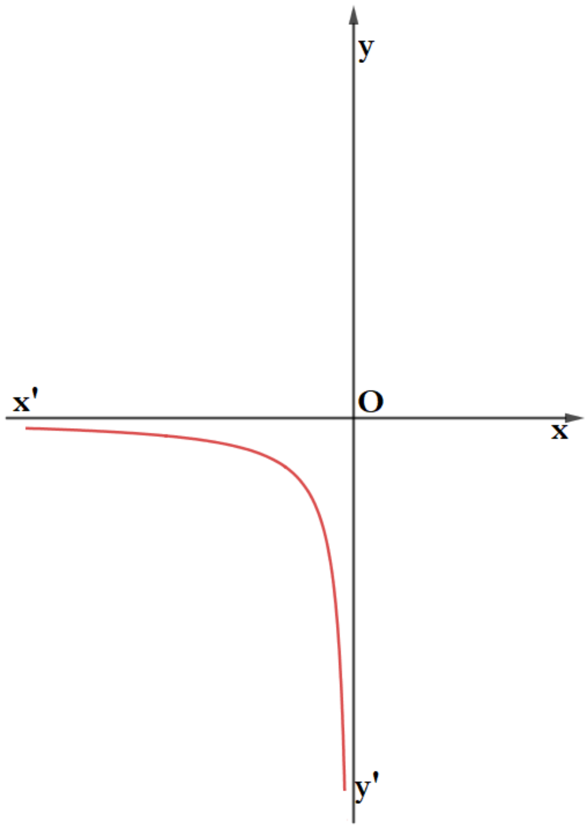
Η $g \circ f^{-1}$ ορίζεται και είναι

$$h(x) = (g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = \sqrt{f^{-1}(x)} = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} = \left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{x-1}{x}\ , \ x \in (-\infty, 0)$$

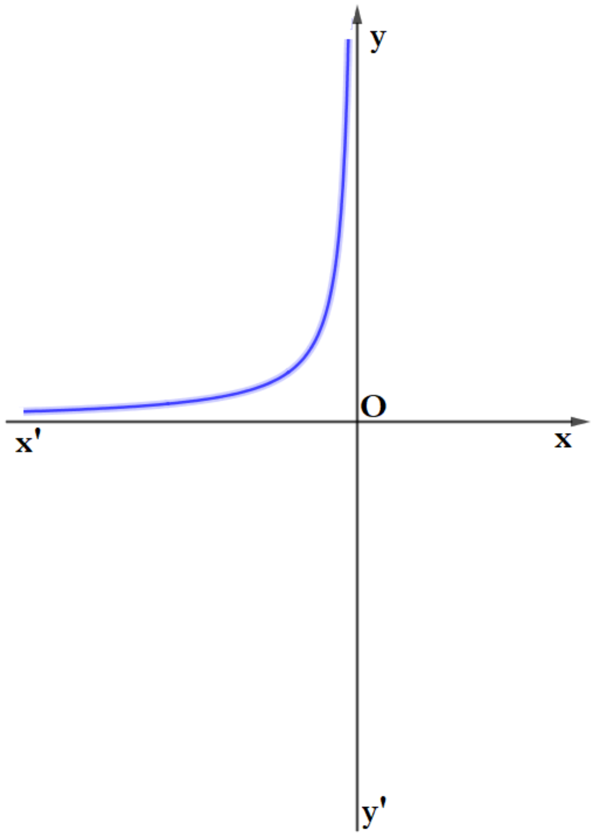
Β3. Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι: $h(x) = (g \circ f^{-1})(x) = \dfrac{x-1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}$

Η γραφική παράσταση της h προκύπτει αν από τη γραφική παράσταση της

$$y = \frac{1}{x} \text{ με } x < 0$$

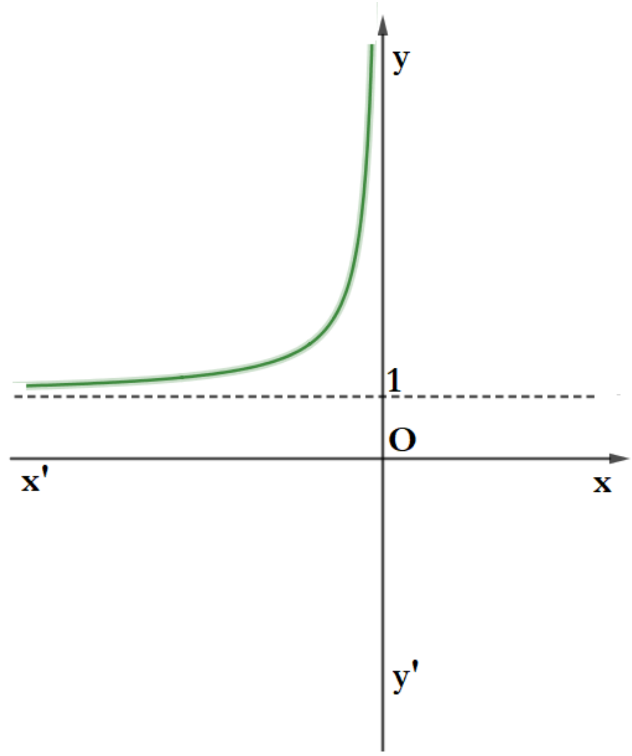


πάρουμε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$



και στη συνέχεια τη μετατοπίσουμε

κατά 1 μονάδα προς τα πάνω στον $y'y$.



Β4. Είναι $\left|e^{-h(x)}\cdot ημ\frac{1}{x}\right|\le e^{-h(x)} \Leftrightarrow -e^{-h(x)}\le e^{-h(x)}\cdot ημ\frac{1}{x}\le e^{-h(x)}$

Για το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-h(x)}$ θέτουμε $u=-h(x)$, οπότε:

$$u_0=\lim_{x\to 0^-}(-h(x))=\lim_{x\to 0^-}\left(-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-1\right)=-\infty$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$ και $x<0$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\right)=\lim\limits_{u\to-\infty} e^{u}=0$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-h(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-e^{-h(x)}\right)=0$

Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής είναι: $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot ημ\frac{1}{x}\right)=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=1$, συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+x\right)=e^{1-1}+1=e^0+1=1+1=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+\alpha\right)=1^2+\alpha=1+\alpha$

Επομένως $1+\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=1$

Γ2. • Για $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ είναι $x_1<x_2\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-1<x_2-1\\ x_1<x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{x_1-1}<e^{x_2-1}\\ x_1<x_2\end{cases}$

και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $e^{x_1-1}+x_1<e^{x_2-1}+x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

άρα η f γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,1)$

- Για $x_3,x_4\in[1,+\infty)$ είναι

$1\le x_3<x_4\Leftrightarrow {x_3}^2<{x_4}^2\Leftrightarrow {x_3}^2+1<{x_4}^2+1\Leftrightarrow f(x_3)<f(x_4)$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=[1,+\infty)$

- Για $x_5\in(-\infty,1)$ και $x_6\in[1,+\infty)$ είναι

$x_5<1\Leftrightarrow x_5-1<0\Leftrightarrow e^{x_5-1}<e^0\Leftrightarrow e^{x_5-1}<1$

Με πρόσθεση κατά μέλη των ανισώσεων $e^{x_5-1}<1$ και $x_5<1$προκύπτει

$$e^{x_5-1}+x_5<1+1\Leftrightarrow f(x_5)<2$$

$x_6\ge1\Leftrightarrow {x_6}^2\ge1^2\Leftrightarrow {x_6}^2\ge1\Leftrightarrow {x_6}^2+1\ge1+1\Leftrightarrow f(x_6)\ge2$

Συνεπώς $x_5\le1\le x_6\Leftrightarrow f(x_5)<2\le f(x_6)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=\mathbb{R}$ άρα

$$f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

Γ3. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ άρα υπάρχει πολύ μικρό κ τέτοιο ώστε $f(\kappa)<0$

Η f είναι συνεχής στο $[\kappa,0]$

Είναι: $f(0)=e^{0-1}+0=e^{-1}>0$

Οπότε $f(\kappa)\cdot f(0)<0$

Επομένως, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\kappa,0)\subseteq(-\infty,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ άρα θα είναι μοναδικό.

Γ4. α. Για $x \in [1, 2]$ είναι $f(x) = x^2 + 1$

Οπότε $g^2(x) = 3x - 1 - (x^2 + 1) = 3x - 1 - x^2 - 1 = -x^2 + 3x - 2$

Είναι $g(x) = 0$ οπότε $g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2$

Για $x \in (1, 2)$ είναι $g(x) \neq 0$ και g συνεχής στο $(1, 2)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Άρα η g διατηρεί πρόσημο στο $(1, 2)$.

β. Είναι $g^2(x) = -x^2 + 3x - 2, \quad x \in [1, 2]$

οπότε είναι $g(x) = -\sqrt{-x^2 + 3x - 2}$ για κάθε $x \in [1, 2]$

ή $g(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$ για κάθε $x \in [1, 2]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 0$, άρα $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x) - \sqrt{x+1}}{\eta\mu x}$ για x κοντά στο 0 με $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

Τότε $\eta\mu x \cdot g(x) = f(x) - \sqrt{x+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x+1} + \eta\mu x \cdot g(x)$

Άρα $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x+1} + \eta\mu x \cdot g(x)\right) = \sqrt{0+1} + \eta\mu 0 \cdot 0 = 1$

Συνεπώς $f(0) = 1$

Είναι: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{\eta\mu 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} + \eta\mu x \cdot g(x) - 1}{\eta\mu 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\eta\mu x}{x} \cdot g(x) + \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}}{3 \cdot \dfrac{\eta\mu 3x}{3x}}$

Αλλά .• $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{x \cdot \left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}^2 - 1}{x \cdot \left(\sqrt{1+x} + 1\right)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + x - \cancel{1}}{x \cdot \left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x \cdot \left(\sqrt{1+x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

- Για το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}$ θέτουμε $u=3x$ άρα $u_0=\lim\limits_{x\to 0}(3x)=0$

  Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\eta\mu 3x}=\frac{1\cdot 0+\frac{1}{2}}{3\cdot 1}=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}$

Δ2. Είναι $f^2(x)=1+2xf(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=1+x^2$

$$\Leftrightarrow (f(x)-x)^2=1+x^2$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)-x,\quad x\in\mathbb{R}$ τότε $h^2(x)=1+x^2>0$ άρα $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, άρα η h διατηρεί πρόσημο.

Συνεπώς $h(x)=\sqrt{1+x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $h(x)=-\sqrt{1+x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αλλά $h(0)=f(0)-0=1>0$, συνεπώς $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε $h(x)=\sqrt{1+x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως $f(x)-x=\sqrt{1+x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x)=x+\sqrt{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}$

Δ3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\cdot f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{2(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)}-\frac{(x+1)}{(x+1)\cdot(x+2)}\right)\cdot f(x)\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+4-x-1}{(x+1)\cdot(x+2)}\cdot f(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+3)}{(x+1)\cdot(x+2)}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+3}{x^2+3x+2}\cdot\left(x+|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]$$

$$\overset{x\to+\infty}{\underset{|x|=x}{=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+3}{x^2+3x+2}\cdot\left(x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+3}{x^2+3x+2}\cdot x\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+3x}{x^2+3x+2}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=2$$

γιατί: • $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

• $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ οπότε $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=1+\sqrt{1}=1+1=2$

Δ4. Για $x\in(\kappa,\kappa+1)$ είναι:

$$\frac{f(x-1)-x}{x-\kappa}+\frac{f(x)-x}{x-\kappa-1}=0 \Leftrightarrow (x-\kappa-1)\cdot(f(x-1)-x)+(x-\kappa)\cdot(f(x)-x)=0$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\Phi(x)=(x-\kappa-1)\cdot(f(x-1)-x)+(x-\kappa)\cdot(f(x)-x),\ x\in[\kappa,\kappa+1]$

Η Φ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[\kappa,\kappa+1]$

Είναι: $\Phi(\kappa)=(\kappa-\kappa-1)\cdot(f(\kappa-1)-\kappa)+(\kappa-\kappa)\cdot(f(\kappa)-\kappa)$

$$=-\left(\kappa-1+\sqrt{1+(\kappa-1)^2}-\kappa\right)=1-\sqrt{1+(\kappa-1)^2}$$

$$=\frac{\left(1-\sqrt{1+(\kappa-1)^2}\right)\left(1+\sqrt{1+(\kappa-1)^2}\right)}{1+\sqrt{1+(\kappa-1)^2}}=\frac{1^2-\sqrt{1+(\kappa-1)^2}^{\,2}}{1+\sqrt{1+(\kappa-1)^2}}$$

$$=\frac{1-\left(1+(\kappa-1)^2\right)}{1+\sqrt{1+(\kappa-1)^2}}=\frac{1-1-(\kappa-1)^2}{1+\sqrt{1+(\kappa-1)^2}}=\frac{-(\kappa-1)^2}{1+\sqrt{1+(\kappa-1)^2}}<0$$

$$\Phi(\kappa+1)=(\kappa+1-\kappa-1)\cdot[f(\kappa+1-1)-\kappa]+(\kappa+1-\kappa)\cdot(f(\kappa)-\kappa)$$

$$=\kappa+\sqrt{1+\kappa^2}-\kappa=\sqrt{1+\kappa^2}>0$$

Άρα $\Phi(\kappa)\cdot\Phi(\kappa+1)<0$

Οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(\kappa,\kappa+1)$ ώστε $\Phi(\rho)=0$

Άρα η εξίσωση $\frac{f(x-1)-x}{x-\kappa}+\frac{f(x)-x}{x-\kappa-1}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\kappa,\kappa+1)$

Γιάννης Κάκανος