

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**Τάξη:** Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**Ημερομηνία:** 24/10/2021**Καθηγητές:** ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΦΑΣΜΑ**Όνοματεπώνυμο:****ΘΕΜΑ Α:**

A₁. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 7**

A₂. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών. **Μονάδες 4**

A₃. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Bolzano. **Μονάδες 4**

A₄. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

2. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.

3. Αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες τότε έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

5. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Μονάδες 10**ΘΕΜΑ Β:**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + x + \alpha, & x > 0 \end{cases}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

B₁. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής. **Μονάδες 5**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $\alpha = -1$.

B₂. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$. **Μονάδες 6**

B₃. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. **Μονάδες 6**

B₄. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x) + 1}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{f(x)} + 2x)$

Μονάδες 4 + 4 = 8

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ με $x > 0$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. **Μονάδες 6**

Γ₂. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{f^2(x) + 1} + f(x) \right)$. **Μονάδες 6**

Γ₃. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda > 0$ το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \frac{1}{x} + \ln \lambda}{x - 1}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός και εν συνεχεία να υπολογίσετε το προηγούμενο όριο. **Μονάδες 6**

Γ₄. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x+1) - f(x+2)}{x - 2020} + \frac{f^{-1}(1)}{x - 2021} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(2020, 2021)$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x - \frac{\pi}{4}$, $x \in \mathbb{R}$ και η συνεχής συνάρτηση

$g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{g(x) - \frac{2x}{\pi}}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi - 2}{\pi}$.

Δ₁. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} . **Μονάδες 5**

Δ₂. Να δείξετε ότι:

α) $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ β) $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ **Μονάδες 3 + 4 = 7**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $g(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi]$.

Δ₃. α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης g . **Μονάδες 4**

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(\theta) \cdot x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$ για τις διάφορες τιμές του $\theta \in [0, \pi]$.

Μονάδες 3

Δ₄. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = |g(x)| \cdot f^{2020}(x)$, $x \in [0, \pi]$ έχει ακριβώς δύο θέσεις ελαχίστου και τουλάχιστον μία θέση μεγίστου στο $[0, \pi]$. **Μονάδες 6**

**Οδηγίες εξέτασης: Όλα τα θέματα να απαντηθούν στο τετράδιό σας.
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

Ευχόμαστε Επιτυχία!!!