Μάθημα / Τάξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία 3/10/2021

Επιμέλεια Διαγωνίσματος
Μανώλης Φουντουλάκης

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Αν $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$, με $Q(x_0) \neq 0$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

(μονάδες 6)

Α.2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$, (ολικό) ελάχιστο;

(μονάδες 4)

Α.3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

(μονάδες 5)

Α.4. Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό** ή **Λάθος**, τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση f είναι περιττή, τότε η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα είναι και "$1-1$".

γ) Ισχύει $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathrm{A}_f$.

δ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ όπου $l < 0$, τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu x \leq |x|$.

(μονάδες 2 x 5 = 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-1}+\lambda^2-2\lambda+2,\ x\in\mathbb{R}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1)=3$.

Β.1. Να δείξετε ότι $\lambda=1$.

(μονάδες 4)

Β.2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(μονάδες 6)

Β.3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x)=1+\ln\dfrac{x-1}{2}, x>1$.

(μονάδες 7)

Β.4. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-f^{-1}(3)}{x^2-x}$

(μονάδες 4)

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+f(1)}{(x-1)^{2022}}$

(μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $A_f=A_g=\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^2-2x+2}-1$ και $g(x)=-x+1$.

Γ.1. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-1,\ x\in\mathbb{R}$.

(μονάδες 6)

Γ.2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g^2(x)-1}$.

(μονάδες 4)

Γ.3. Αν για μια συνάρτηση h ισχύει $f(x)\le h(x)\le g^2(x+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$ *β)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(h(x))}{h^2(x)+h(x)}$ *γ)* $\lim\limits_{x\to 0}\left[\eta\mu(h(x))\cdot\eta\mu^2\dfrac{1}{h^3(x)}\right]$

(μονάδες 2 + 3 + 3)

Γ.4. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x}+\ln(-g(x)+2)=g(f(0))$ όπου $x\in(-1,+\infty)$.

(μονάδες 7)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται συνάρτηση f με $A_f=(0,+\infty)$ για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\left|\eta\mu\left(f(x)-\ln x+\frac{1}{x}-1\right)\right|\geq\left|\frac{x\cdot f(x)-\ln(x\cdot e)^x+1}{x}\right|$$

Δ.1. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+1$, $x>0$.

(μονάδες 6)

Δ.2. Να βρείτε την σύνθεση της g με την f, όπου $g(x)=-\left[f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$, $x>0$.

(μονάδες 4)

Δ.3. Με δεδομένο ότι f ↗ άρα ορίζεται η f^{-1} με $A_{f^{-1}}=\mathbb{R}$:

α) να δείξετε ότι: $f^{-1}(0)+f^{-1}(-e)<f^{-1}\left(2-\frac{1}{e}\right)$

(μονάδες 4)

β) να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}\left(f(x)-e-\ln 2022-\frac{2021}{2022}\right)<\frac{1}{e}$

(μονάδες 6)

Δ.4. Να λύσετε την εξίσωση: $(2x+1)e^{2x}=1$ όπου $x\in\mathbb{R}$.

(μονάδες 5)

Ευχόμαστε επιτυχία!