<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 14/11/2021</u>
<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ Α:</u>
Α1. α) Σχολικό βιβλίο σελ. 99
β) Σχολικό βιβλίο σελ. 99
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 73
Α3. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

<u>ΘΕΜΑ Β:</u>
Β1. Στη σχέση $f(x+1)=e^{x+1}+x$ θέτουμε $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1$, οπότε έχουμε $f(u)=e^u+u-1$. Άρα $f(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.
Β2. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

$x_1<x_2 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-1<x_2-1$ (2)

(1)+(2): $f(x_1)<f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Β3. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
$f(1)=e^1+1-1=e$, οπότε έχουμε: $f(1)=e\Leftrightarrow f^{-1}(e)=1$.
Β4. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις συνεχών και γνησίως αύξουσα.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x-1)=0+(-\infty)-1=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x-1)=(+\infty)+(+\infty)-1=+\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι: $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.
Το 2021 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση $f(x)=2021$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

<u>ΘΕΜΑ Γ:</u>
Γ1. Αρχικά πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$, δηλαδή πρέπει

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-}(x^3-x+\alpha^2)=\lim\limits_{x\to1^+}(2\alpha\sqrt{x})=2\alpha\Leftrightarrow\alpha^2=2\alpha$.

$\alpha^2=2\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha=0\Leftrightarrow\alpha(\alpha-2)=0\Leftrightarrow\alpha=0$ ή $\alpha=2$.

• Για $\alpha=0$ είναι $f(x)=\begin{cases}x^3-x,\ x<1\\ 0,\ x\geq1\end{cases}$, οπότε

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3-x-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x(x-1)(x+1)}{x-1}=2$ και

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{0-0}{x-1}=0$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

• Για $\alpha=2$ είναι $f(x)=\begin{cases}x^3-x+4,\ x<1\\ 4\sqrt{x},\ x\geq1\end{cases}$, οπότε

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3-x+4-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x(x-1)(x+1)}{x-1}=2$ και

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4\sqrt{x}-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=2$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, με $f'(1)=2$.
Άρα $\alpha=2$.

Γ2. Είναι $f(x)=\begin{cases} x^3-x+4,\ x<1 \\ 4\sqrt{x},\ x\geq 1\end{cases}$.

Για $x<1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, με $f'(x)=(x^3-x+4)'=3x^2-1$.

Για $x>1$ η f είναι παραγωγίσιμη, με $f'(x)=(4\sqrt{x})'=4\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Για $x=1$, από το ερώτημα Γ1. Έχουμε ότι $f'(1)=2$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1,\ x<1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x}},\ x\geq 1\end{cases}$.

Γ3. i) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f'(x)}{f'(x)-1}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}}-1}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2}{2-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 4}\left(2\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}\right)$.

- $\lim\limits_{x\to 4}(2-\sqrt{x})=0$
- $2-\sqrt{x}>0$ για κάθε x κοντά στο 4, με $x<4$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(2\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}\right)=+\infty$.

- $2-\sqrt{x}<0$ για κάθε x κοντά στο 4, με $x>4$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 4^+}\left(2\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}\right)=-\infty$.

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 4}\left(2\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}\right)$.

ii) • $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f'(x)}+\sqrt{3}\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3}\cdot x\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{3}\cdot x\right)\overset{(x<0)}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3}\cdot x\right)=$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{3-\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{3}\right)\right]=(+\infty)\cdot 0$ (Απροσδιοριστία). Οπότε

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f'(x)}+\sqrt{3}\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3}\cdot x\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3}\cdot x\right)\left(\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3}\cdot x\right)}{\left(\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3}\cdot x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-1-3x^2}{-x\left(\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3}}\right)=0\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=0.$$

Γ4. Είναι $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}},\ x\geq 1$.

Έστω $x_1,x_2\geq 1$ με $g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{2}{\sqrt{x_1}}=\dfrac{2}{\sqrt{x_2}}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x_1=x_2$. Επομένως η g είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$g^{-1}(y)=x \Leftrightarrow g(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x}}=y$. Είναι $y>0$ (1)

$\dfrac{2}{\sqrt{x}}=y \Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{2}{y} \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{y^2}$.

Είναι $x\ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{y^2}\ge 1 \Leftrightarrow y^2\le 4 \Leftrightarrow |y|\le 2 \Leftrightarrow -2\le y\le 2$ (2)

(1),(2): $0<y\le 2$.

Άρα $g^{-1}(x)=\dfrac{4}{x^2}$, $0<x\le 2$.

[Μπορούμε να βρούμε το $D_{g^{-1}}=g\left([1,+\infty)\right)$ χρησιμοποιώντας τη συνέχεια και τη μονοτονία της g.]

<u>ΘΕΜΑ Δ:</u>

Δ1. Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)\eta\mu x+\sqrt[3]{x+1}-1}{x^2+x}$ για x κοντά στο 0. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\dfrac{4}{3}$.

$$g(x)=\frac{f(x)\eta\mu x+\sqrt[3]{x+1}-1}{x^2+x} \Leftrightarrow f(x)\eta\mu x+\sqrt[3]{x+1}-1=(x^2+x)g(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{(x^2+x)g(x)+1-\sqrt[3]{x+1}}{\eta\mu x} \overset{(x\neq 0)}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{\dfrac{(x^2+x)g(x)}{x}+\dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}.$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+x)g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(x+1)g(x)\right]=1\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt[3]{x+1}\right)\left[1+\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2\right]}{x\left[1+\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2\right]}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3}{x\left[1+\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left[1+\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2\right]}=-\frac{1}{3}$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{(x^2+x)g(x)}{x}+\dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}}{1}=1$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε και στο 0, επομένως $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Δ2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$

$f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+1-\eta\mu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)\eta\mu x+\eta\mu^2 x=x^2+1 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)+\eta\mu x\right)^2=x^2+1\neq 0$. Οπότε $f(x)+\eta\mu x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης η συνάρτηση $f(x)+\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών.

Επομένως η συνάρτηση $f(x)+\eta\mu x$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Για $x=0$: $f(0)+\eta\mu 0=1>0$.

Άρα $f(x)+\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$\left(f(x)+\eta\mu x\right)^2=x^2+1 \Leftrightarrow f(x)+\eta\mu x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ3. $\dfrac{f(\alpha)}{x-\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta-x} \Leftrightarrow (\beta-x)f(\alpha)=(x-\alpha)f(\beta) \Leftrightarrow$

$(\beta - x) f(\alpha) - (x-\alpha) f(\beta) = 0$.

Θέτουμε $h(x) = (\beta - x) f(\alpha) - (x-\alpha) f(\beta)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

• Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πολυωνυμική.

• $h(\alpha) = (\beta - \alpha) f(\alpha) > 0$, γιατί $\alpha < \beta$ και $f(\alpha) = \sqrt{\alpha^2+1} - \eta\mu\alpha > 0$, αφού $\sqrt{\alpha^2+1} \geq 1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $\alpha = 0$, ενώ $\eta\mu\alpha \leq 1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $\alpha = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \neq 0$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

• $h(\beta) = -(\beta - \alpha) f(\beta) < 0$ (ίδια αιτιολόγηση)

Οπότε $h(\alpha) \cdot h(\beta) < 0$ και από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) και αφού η h είναι πολυωνυμική $1^{ου}$ βαθμού, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Δ4. Αρχικά βρίσκουμε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+1} - 1 \leq \sqrt{x^2+1} - \eta\mu x \leq \sqrt{x^2+1} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 1 \leq f(x) \leq \sqrt{x^2+1} + 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + 1\right) = +\infty$.

Από Κ.Π. έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Για το ζητούμενο όριο θέτουμε $u = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{u}$.

Όταν $x \to +\infty$, τότε $u \to \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$. Οπότε

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right) = \lim\limits_{u \to 0} \left(\frac{1}{u} \cdot \eta\mu u \right) = \lim\limits_{u \to 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$.