ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε περίπτωση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, ισχύει $g\circ f=f\circ g$.

β) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty,\ \nu\in\mathbb{N}$.

γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της.

δ) Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύει $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)\ne\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

ε) Αν $\left|\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right|=1$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ ή -1.

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι 1 – 1 είναι και γνησίως μονότονη».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής για την οποία ισχύει $(x-1)f(x)=\alpha x^2+\beta x-2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1,3).

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha=1,\beta=1$

Β2. Δείξτε ότι $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\ne 1\\ 3, & x=1\end{cases}$

Β3. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x\to+\infty}\left(f^2(x)\cdot \eta\mu\frac{1}{f(x)}\right)$, $\lim_{x\to+\infty}\left(\eta\mu f(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right)$

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\lambda}{f(x)}+\frac{\mu}{f(x+1)}=1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-3,-2), όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ομόσημοι αριθμοί.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή, συνεχής στο 0 και τέτοια, ώστε

$x^2 f(x)\le \eta\mu^3 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι f (0) = 0

Γ2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f. Αν η $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu^3 x}{x^2}, & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ τότε

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο Ο (0,0).

Γ4. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^{\eta\mu x}$, $x>0$ στο σημείο $M\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και

$4f(x^2)+xf(2x)=x^4+x^3+x+4$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Δ1. Να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(4)$ και το όριο $\lim_{x\to1}\frac{|2x-3|-1}{f(x+3)-5}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α(2,f(2)) διέρχεται από το σημείο Β(4,8 - 8 f' (1)).

Δ3. Ένα σημείο Μ(x,y) κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f έτσι, ώστε η τετμημένη του x να αυξάνει με ρυθμό 6 cm/sec. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία τγο Μ διέρχεται από το σημεία Γ(4,f(4)), να βρείτε:

α) το ρυθμό με τον οποίο αυξάνει η τεταγμένη του y του σημείου Μ

β) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του τριγώνου ΟΜΝ, όπου Ο η αρχή των αξόνων και Ν η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.