

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1

Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030

2. ☒ Φανερωμένης 13

Χολαργός , ☎ 210 65 36 551

www.en-dynamei.gr



Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 13/11/2021

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

A3. Να δώσετε τον ορισμό της εξίσωσης εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και υπάρχει $x_0 \in [α, β]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ τότε κατ' ανάγκην θα ισχύει $f(α) \cdot f(β) < 0$.
2. Αν f, g παραγωγίσιμες στο x_0 τότε $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{g^2(x_0)}$.
3. Για τη συνάρτηση $f(x) = 3^x$ ισχύει $f'(x) = x \cdot 3^{x-1}$.
4. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται 1-1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
5. Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε για την αντίστροφη της f^{-1} ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$.

Μονάδες 6 – 5 – 4 – 10

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

B1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της Cf.

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντιστροφή της.

B3. Αν $g(x) = f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in (-1,1)$.

α) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της g στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = \frac{8}{3}x + 5$ και να γραψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 6 – 7 – 6 – 6

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 0$ είναι η εφαπτομένη της Cf στο (0,0) και στην συνέχεια να δείξετε ότι εφαπτομένη αυτή έχει με τη Cf άπειρα κοινά σημεία.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ έχει μια τουλάχιστον ριζά στο $\left(\frac{1}{\pi}, \pi\right)$.

Μονάδες 7 – 5 – 7 – 6

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



Θέμα Δ

Δίνεται η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f^3(x) + \alpha f(x) = -x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να δείξετε ότι :

$$f^{-1}(x) = -x^3 - \alpha x + \beta, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Αν $g(x) = f^{-1}(x) = -x^3 - \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$ και ισχυει ότι η Cg εφάπτεται

στην $y = -x + 3$ στο σημείο με τετμημένη $x_1 = 0$ τότε :

α) Να δείξετε ότι $g(x) = -x^3 - x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της Cf στο σημείο $M(3, f(3))$ σχηματίζει με τον x ' x γωνιά $\frac{3\pi}{4}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της Cg σε οποιοδήποτε σημείο $K(x_0, g(x_0))$, $x_0 \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο εκτός του K .

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)(x^{2021} + \kappa x^{2020} + \lambda x + 1) = e^{2x}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει μια τουλάχιστον ριζά στο $(0, 2)$.

Μονάδες 5 – 3 – 7 – 5 – 5