ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ/ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	06/11/2021

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 2)

Α2. α. Έστω μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α. Να ορίσετε την συνάρτηση f΄, δηλαδή την **παράγωγο της f.**

(Μονάδες 3)

β. Να διατυπώσετε το θεώρημα του **Bolzano.**

(Μονάδες 2)

Α3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$. Να δείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x\in(0,+\infty)$.

(Μονάδες 8)

Α4. Να χαρακτηρίσετε καθεμία τις προτάσεις που ακολουθούν ως: **Σωστή,** ή **Λανθασμένη**.

α. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)\right)$.

γ. Μια συνάρτηση f που δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, δεν είναι και παραγωγίσιμη σ'αυτό.

δ. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Τότε η f παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στις τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

ε. Ισχύει ότι: $f^{(\nu)}=\left[f^{(\nu-1)}\right]', \nu\geq 3$.

(Μονάδες 5 x 2 = 10)

Φροντιστήρια Εν-τάξη

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+\frac{1}{e^x}$. Να δείξετε ότι:

Β1. α. Το πεδίο ορισμού της f είναι το R.

β. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

(Μονάδες 1+3+2 = 6)

Β2. α. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

β. Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(R)=(1,+\infty)$.

(Μονάδες 2+3 = 5)

Β3. α. Η f έχει αντίστροφη.

β. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης της f είναι $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1}{x-1}\right),\ x>1$.

(Μονάδες 2+5 = 7)

Β4. α. Η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

β. $f'(2)=-\frac{1}{e^2}$.

γ. $\lim\limits_{x\to2}\left[f^{-1}(x)+\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right]=-\frac{1}{e^2}$.

(Μονάδες 3+2+2 = 7)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f:[-1,+\infty)\to R$ μια συνάρτηση συνεχής για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x}=\frac{1}{2}$
- $f^2(x)+3=4f(x)+x$, για κάθε $x\in[-1,+\infty)$.

Γ1. Να δείξετε ότι:

α. $f(0)=3$.

β. $f(x)=\sqrt{x+1}+2,\ x\in[-1,+\infty)$.

(Μονάδες 3+4 = 7)

Γ2. Αν $g:R\to R$ μια συνεχής συνάρτηση με σύνολο τιμών το διάστημα $g(R)=(2,3)$, να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των f και g έχουν στο διάστημα $(-1,0)$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(Μονάδες 4)

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $6f(x)=3f\left(\eta\mu\frac{\pi}{7}\right)+f\left(\eta\mu\frac{\pi}{9}\right)+2f\left(\eta\mu\frac{\pi}{11}\right)$ έχει λύση $x_0\in(0,1)$.

(Μονάδες 5)

Φροντιστήρια Εν-τάξη

Γ4. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu(f'(x))}{f'(x)}$

(Μονάδες 1+1+2 = 4)

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2^{f(x)+1}-3^{f(x)}}{2^{f(x)}+3^{f(x)-1}}\right]$

(Μονάδες 3)

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$, όπου h η συνάρτηση για την οποία ισχύει: $h(x)>f(x)$, για κάθε $x\in[-1,+\infty)$.

(Μονάδες 2)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Έστω $f:R\to R$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xf\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)+x\right]=-13$
- $\left(f^2(x)\right)'\neq 0$, για κάθε $x\in R$.

Δ1. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(2)$ και $f'(2)$.

(Μονάδες 4+3 = 7)

Δ2. Αν $\alpha,\beta\in R$, να δείξετε ότι: $\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{(f'(\alpha)-f(\beta))h^3-h^2+1}{2h^2+h+3}=+\infty$.

(Μονάδες 4)

Δίνεται , επιπλέον, η πολυωνυμική συνάρτηση P(x) τρίτου βαθμού, για την οποία:
$P(2)=f(2)$, $P'(2)=f'(2)$, $P''(1)=P^{(3)}(2021)=6$.

Δ3. Να δείξετε ότι $P(x)=x^3+x-11$.

(Μονάδες 4)

Δ4. α. Να δείξετε ότι η P(x) αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της $P^{-1}(x)$ είναι το R.

(Μονάδες 1+2 = 3)

β. Αν η $P^{-1}(x)$ είναι παραγωγίσιμη να βρείτε την τιμή $\left(P^{-1}\right)'(-11)$.

(Μονάδες 4)

γ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{P^{-1}(2h-11)-P^{-1}(-11)}{h}$.

(Μονάδες 3)

Φροντιστήρια Εν-τάξη