ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	6 /11 / 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 73.

Α2. **α.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 104. **β.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 74.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 106.

Α4. **α. Σ,** **β. Λ,** **γ. Σ ,** **δ. Λ,** **ε. Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. **α.** $e^x > 0$, για κάθε $x \in R$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το R.

β. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+e^{-x}\right) = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} \overset{-x=u}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$.

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right) = 1$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} \overset{-x=u}{=} \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$.

Β2. **α.** Για κάθε $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^{x_1}} > \dfrac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^{x_1}} + 1 > \dfrac{1}{e^{x_2}} + 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

β. Η f είναι συνεχής στο R ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και γνησίως φθίνουσα σ΄ αυτό, άρα το σύνολο τιμών της είναι το:

$f(R) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1\infty} f(x)\right) = (1, +\infty)$.

Β3. **α.** Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R , άρα και 1-1 σ΄ αυτό, συνεπώς αντιστρέφεται , δηλαδή έχει αντίστροφη.

β. Θέτουμε $f(x) = y$, άρα $x = f^{-1}(y)$, $y \in R$. Επομένως $f(x) = y \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{e^x} = y \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{e^x} = y - 1$, με $y > 1$, άρα $e^x = \dfrac{1}{y-1}$, με $y > 1$, ισοδύναμα: $x = \ln\left(\dfrac{1}{y-1}\right)$, $y > 1$.

Συνεπώς $f^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{1}{y-1}\right)$, $y > 1$, άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης της f είναι $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1}{x-1}\right),\ x>1$.

B4. **α.** $f(x)=2x \Leftrightarrow 1+\frac{1}{e^x}=2x \Leftrightarrow \frac{1}{e^x}-2x+1=0$.

Θεωρούμε $g(x)=\frac{1}{e^x}-2x+1,\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Η $g(x)=\frac{1}{e^x}-2x+1$ συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων και: $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}-2\frac{1}{2}+1=\frac{1}{\sqrt{e}}>0,\ g(1)=\frac{1}{e}-2+1=\frac{1}{e}-1<0$,

άρα $g\left(\frac{1}{2}\right)g(1)<0$. Οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, με $x_1<x_2$, έχουμε: $-2x_1>-2x_2$ και $e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}}>\frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}}+1>\frac{1}{e^{x_2}}+1$, όπου με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε: $\frac{1}{e^{x_1}}-2x_1+1>\frac{1}{e^{x_2}}-2x_2+1 \Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$, επομένως η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$. Οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\left(1+\frac{1}{e^x}\right)'=\left(e^{-x}\right)'=-e^{-x}$, που για $x=2$, δίνει: $f'(2)=-e^{-2}=-\frac{1}{e^2}$.

γ. $\lim\limits_{x\to 2}\left[f^{-1}(x)+\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\left[\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)+\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right]=L$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)\overset{\frac{1}{x-1}=u}{=}\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right]=f'(2)=-\frac{1}{e^2}$,

άρα $L=-\frac{1}{e^2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **α.** Θέτουμε $\phi(x)=\frac{f(x)-3}{x}$, άρα θα ισχύει $\lim_{x\to 0}\Phi(x)=\frac{1}{2}$.

Για κάθε x κοντά στο 0, έχουμε:

$\phi(x)=\frac{f(x)-3}{x}\Leftrightarrow x\cdot\phi(x)=f(x)-3\Leftrightarrow f(x)=x\cdot\phi(x)+3$.

Είναι $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(x\cdot\phi(x)+3)=0\cdot\frac{1}{2}+3=3$. Η f είναι συνεχής στο 0, συνεπώς $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow f(0)=3$.

β. Για κάθε $x\in[-1,+\infty)$ είναι:

$f^2(x)+3=4f(x)+x\Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)+4-1=x\Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)+4=x+1$

$\Leftrightarrow(f(x)-2)^2=x+1\Leftrightarrow|f(x)-2|=\sqrt{x+1}$.

Θέτουμε $F(x)=f(x)-2$, οπότε η τελευταία γίνεται: $|F(x)|=\sqrt{x+1}$, $x\geq -1$.

Είναι $\sqrt{x+1}>0$ για κάθε $x>-1$, οπότε $F(x)\neq 0$ για κάθε $x>-1$.

Η F επίσης είναι συνεχής (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων) οπότε θα διατηρεί το πρόσημό της στο $(-1,+\infty)$.

Για x=0 είναι $F(0)=f(0)-2=3-2=1>0$. Άρα $F(x)>0$ για κάθε $x>-1$.

Επίσης για $x=-1$ είναι $F(-1)=0$, άρα τελικά $F(x)=\sqrt{x+1}$, $x\geq -1$.

Οπότε $f(x)-2=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x+1}+2$, $x\in[-1,+\infty)$.

Γ2. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$. Ισοδύναμα έχουμε $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$.

Θέτουμε $K(x)=f(x)-g(x)$ και έχουμε:

- K συνεχής στο $[-1,0]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $K(-1)\cdot K(0)=(f(-1)-g(-1))(f(0)-g(0))=(2-g(-1))(3-g(0))$

Εφόσον $g(R)=(2,3)$, τότε $2<g(x)<3$ για κάθε $x\in R$, οπότε για x=-1 θα είναι $2<g(-1)<3$ δηλ. $2-g(-1)<0$, ενώ για x=0 θα είναι $2<g(0)<3$ δηλ. $3-g(0)>0$.

Οπότε $K(-1)\cdot K(0)<0$, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(-1,0)$, ώστε να ισχύει $K(x_1)=0$. Δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν στο διάστημα $(-1,0)$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Γ3. Είναι $\frac{\pi}{7},\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{11}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Επίσης f γνησίως αύξουσα, αφού για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$

με $x_1<x_2$ είναι: $x_1<x_2$, άρα $x_1+1<x_2+1$, οπότε $\sqrt{x_1+1}<\sqrt{x_2+1}$, συνεπώς $\sqrt{x_1+1}+2<\sqrt{x_2+1}+2$ άρα $f(x_1)<f(x_2)$.

Έχουμε λοιπόν:

$$0<\eta\mu\frac{\pi}{7}<1 \overset{f:\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f(0)<f\left(\eta\mu\frac{\pi}{7}\right)<f(1) \Leftrightarrow 3f(0)<3f\left(\eta\mu\frac{\pi}{7}\right)<3f(1) \quad (1)$$

$$0<\eta\mu\frac{\pi}{9}<1 \overset{f:\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f(0)<f\left(\eta\mu\frac{\pi}{9}\right)<f(1) \quad (2)$$

$$0<\eta\mu\frac{\pi}{11}<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0)<f\left(\eta\mu\frac{\pi}{11}\right)<f(1) \Leftrightarrow 2f(0)<2f\left(\eta\mu\frac{\pi}{11}\right)<2f(1) \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) , (2) και (3) έχουμε:

$$3f(0)+f(0)+2f(0)<3f\left(\eta\mu\frac{\pi}{7}\right)+f\left(\eta\mu\frac{\pi}{9}\right)+2f\left(\eta\mu\frac{\pi}{11}\right)<3f(1)+f(1)+2f(1)$$

$$\Leftrightarrow 6f(0)<3f\left(\eta\mu\frac{\pi}{7}\right)+f\left(\eta\mu\frac{\pi}{9}\right)+2f\left(\eta\mu\frac{\pi}{11}\right)<6f(1)$$

$$\Leftrightarrow f(0)<\frac{3f\left(\eta\mu\frac{\pi}{7}\right)+f\left(\eta\mu\frac{\pi}{9}\right)+2f\left(\eta\mu\frac{\pi}{11}\right)}{6}<f(1)$$

Εφόσον ο αριθμός $\eta=\dfrac{3f\left(\eta\mu\frac{\pi}{7}\right)+f\left(\eta\mu\frac{\pi}{9}\right)+2f\left(\eta\mu\frac{\pi}{11}\right)}{6}$ βρίσκεται ανάμεσα στο $f(0)$ και το $f(1)$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$, ώστε να ισχύει:

$$f(x_0)=\frac{3f\left(\eta\mu\frac{\pi}{7}\right)+f\left(\eta\mu\frac{\pi}{9}\right)+2f\left(\eta\mu\frac{\pi}{11}\right)}{6} \Leftrightarrow 6f(x_0)=3f\left(\eta\mu\frac{\pi}{7}\right)+f\left(\eta\mu\frac{\pi}{9}\right)+2f\left(\eta\mu\frac{\pi}{11}\right).$$

Δηλαδή η εξίσωση $6f(x)=3f\left(\eta\mu\frac{\pi}{7}\right)+f\left(\eta\mu\frac{\pi}{9}\right)+2f\left(\eta\mu\frac{\pi}{11}\right)$ έχει λύση $x_0\in(0,1)$.

Γ4. i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+2\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x+1}=+\infty$

και για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu(f'(x))}{f'(x)}$, θέτουμε $u=f'(x)$, δηλαδή $u_0=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$,

οπότε το όριο γίνεται $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2^{f(x)+1}-3^{f(x)}}{2^{f(x)}+3^{f(x)-1}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2\cdot 2^{f(x)}-3^{f(x)}}{2^{f(x)}+\dfrac{3^{f(x)}}{3}}\right]$,

θέτουμε $u=f(x)$, $u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

άρα το όριο γίνεται $\lim\limits_{u\to+\infty}\left[\dfrac{2\cdot 2^u-3^u}{2^u+\dfrac{1}{3}\cdot 3^u}\right]=\lim\limits_{u\to+\infty}\left[\dfrac{3^u\left[2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^u-1\right]}{3^u\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^u+\dfrac{1}{3}\right]}\right]=$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\left[\dfrac{2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^u-1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^u+\dfrac{1}{3}}\right]=-3$, αφού $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^u=0$

iii) Εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και $h(x)>f(x)$ για κάθε $x\in[-1,+\infty)$,
θα είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[xf\left(\frac{2x-1}{x}\right)+x\right]=-13\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(f\left(\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}\right)+1\right)\right]=-13$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f\left(2-\frac{1}{x}\right)+1}{\frac{1}{x}}\right]=-13$$

Θέτουμε $2-\dfrac{1}{x}=u$, άρα $u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)=2$, οπότε το όριο γίνεται:

$\lim\limits_{u\to2}\left[\dfrac{f(u)+1}{2-u}\right]=-13$.

Θέτουμε $g(u)=\dfrac{f(u)+1}{2-u}$, οπότε θα είναι $\lim\limits_{u\to0}g(u)=-13$.

Για u κοντά στο 2 έχουμε

$g(u)=\dfrac{f(u)+1}{2-u} \Leftrightarrow f(u)+1=g(u)\cdot(2-u) \Leftrightarrow f(u)=g(u)\cdot(2-u)-1$.

Είναι $\lim\limits_{u\to 2} f(u)=\lim\limits_{u\to 2}\left(g(u)\cdot(2-u)-1\right)=-13\cdot(2-2)-1=-1$.

Η f είναι συνεχής, οπότε $\lim\limits_{u\to 2} f(u)=f(2)\Leftrightarrow f(2)=-1$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-(-1)}{-(2-x)}=-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+1}{2-x}=-(-13)=13$.

Άρα $f'(2)=13$.

Δ2. Εφόσον για κάθε $x\in R$, $\left(f^2(x)\right)'\neq 0$, δηλαδή $2f(x)f'(x)\neq 0$,

οι συνεχείς συναρτήσεις f και f ', θα διατηρούν το πρόσημό τους στο R.

Εφόσον από το προηγούμενο ερώτημα είναι $f'(2)>0$, $f(2)<0$,

τότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in R$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Οπότε $f'(\alpha)-f(\beta)>0$. Συνεπώς:

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{\left(f'(\alpha)-f(\beta)\right)h^3-h^2+1}{2h^2+h+3}=\lim_{h\to+\infty}\frac{\left(f'(\alpha)-f(\beta)\right)h^3}{2h^2}=\lim_{h\to+\infty}\frac{\left(f'(\alpha)-f(\beta)\right)h}{2}=+\infty.$$

Δ3. Έστω το πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, με $\alpha\neq 0$.

Έχουμε λοιπόν: $P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$, $P''(x)=6\alpha x+2\beta$, $P^{(3)}(x)=6\alpha$.

Άρα θα είναι $P^{(3)}(2021)=6\Leftrightarrow 6\alpha=6\Leftrightarrow \alpha=1$.

$P''(1)=6\Leftrightarrow 6\alpha\cdot 1+2\beta=6 \overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow} 6+2\beta=6\Leftrightarrow \beta=0$.

$P'(2)=f'(2)\Leftrightarrow 3\alpha\cdot 2^2+2\beta\cdot 2+\gamma=13 \underset{\beta=0}{\overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow}} 12+\gamma=13\Leftrightarrow \gamma=1$.

$P(2)=f(2)\Leftrightarrow 1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2+\delta=-1\Leftrightarrow \delta=-11$.

Άρα $P(x)=x^3+x-11$.

Δ4. α. P(x) γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο R, αφού για κάθε $x_1,x_2\in R$,

με $x_1<x_2$ (1) είναι: $x_1^{\,3}<x_2^{\,3}$, άρα και $x_1^{\,3}-11<x_2^{\,3}-11$ (2)

οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει $P(x_1)<P(x_2)$.

Συνεπώς η P(x) είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της $P^{-1}(x)$,

δηλαδή το σύνολο τιμών της P(x) θα είναι:

$P(R)\overset{P:\text{γν.αύξ.}}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}P(x),\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R$.

β. Ισχύει ότι $P\left(P^{-1}(x)\right)=x$, οπότε δεδομένου ότι η $P^{-1}(x)$ είναι

παραγωγίσιμη, με παραγώγιση της ισότητας κατά μέλη έχουμε:

$\left[P\left(P^{-1}(x)\right)\right]'=(x)'\Leftrightarrow P'\left(P^{-1}(x)\right)\cdot\left(P^{-1}\right)'(x)=1$. Για x=-11 έχουμε:

$P'\left(P^{-1}(-11)\right)\cdot\left(P^{-1}\right)'(-11)=1$ (3).

Όμως $P^{-1}(-11)=P^{-1}(P(0))=0$, άρα η (3) γίνεται:

$$P'(0)\cdot(P^{-1})'(-11)=1\Leftrightarrow(3\cdot 0^2+1)(P^{-1})'(-11)=1\Leftrightarrow(P^{-1})'(-11)=1,$$

αφού $P'(x)=3x^2+1$.

γ. $$\lim_{h\to 0}\frac{P^{-1}(2h-11)-P^{-1}(-11)}{h}=2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{P^{-1}(2h-11)-P^{-1}(-11)}{2h}=A$$

άρα θέτοντας $2h=u$, $u_0=\lim\limits_{h\to 0}2h=0$, θα έχουμε:

$$A=2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{P^{-1}(2h-11)-P^{-1}(-11)}{2h}=2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{P^{-1}(u-11)-P^{-1}(-11)}{u}=$$

$$=2\cdot(P^{-1})'(-11)=2\cdot 1=2.$$