ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΜΗΜΑΤΑ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

4/12/2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Μονάδες 3

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Αν $f(x)=\ln|x|, x\in\mathbb{R}^*$, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x)=\frac{1}{x}, x\in\mathbb{R}^*$

Μονάδες 6

Α4. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x)=|\eta\mu x|, x\in[-\pi,\pi]$

β) $f(x)=|\ln x|, x>0$

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε σε κάθε περίπτωση είναι και παραγωγίσιμη στο x_0

β) Αν ισχύουν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha, \alpha>0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x).g(x)\right)=+\infty$

γ) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και $f(0)=1$, $f(2)=4$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε να είναι $f(x_0)=\pi$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h με τύπους:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right), x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\ln(x-1), x>1$$

$$h(x)=\sqrt{x^2+1+\eta\mu x}+x, x\in\mathbb{R}$$

B1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και $\frac{f}{g}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B3. Για τις διάφορες τιμές τού $\lambda\in\mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\left(\lambda x^2-1\right)\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}\right)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha+\beta=2$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^{2021}+(\alpha\beta-6)x+f(0)+g(e+1)=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+\alpha, & x<0 \\ e^x-3, & x\geq 0 \end{cases},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-2$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [0,1] και κατόπιν να βρείτε τους αριθμούς ξ για τους οποίους γίνεται λόγος στο θεώρημα.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x+e^x}{f(x)}$

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}

Μονάδες 5

Γ5. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' της f

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=e^{1-x}-\ln x+1,\ x>0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι f αντιστρέφεται και κατόπιν να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει μία ακριβώς ρίζα ρ με $\rho > 1$ Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση:

$$e > e^x (\ln x + 1)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f'(x) + f''(x) + \frac{\eta\mu x}{x^2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Δ4. Σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης με τύπο $g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2\frac{m}{s}$. Αν Α είναι η προβολή του Μ στον άξονα $x'x$, τότε να βρείτε το σημείο Μ στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου πλευράς ΜΑ είναι $4e^4\ \frac{m^2}{s}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5