



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΔΕΚΕΜΒΡΗ 2021  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)  
**19<sup>ο</sup> ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε το **Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού**:

«Εστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha) = [G(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

**Μονάδες 8**

**A2.** Έστω  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  και μια πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ,

α) τι ονομάζεται σύνολο τιμών της  $f$  και πως συμβολίζεται;

β) Αν η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta = (\alpha, \beta)$ , ποιο είναι τότε το σύνολο τιμών της

γ) Αν η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta = [\alpha, +\infty)$ , ποιο είναι τότε το σύνολο τιμών της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό

«Για κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(x) \geq 0$ , για

κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και για την οποία ισχύει ότι  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ , τότε η  $f$  είναι

παντού μηδέν στο  $[\alpha, \beta]$ , δηλαδή  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μον. 3)

**Μονάδες 4**



**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας όπου ζητείται.

**α.** Για κάθε πραγματική συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η γραφική παράσταση της  $G(x) = f(|x|)$  έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα  $y'y$ .

( 1 μονάδα η σωστή απάντηση 1 μονάδα η αιτιολόγηση)

**Μονάδες 2**

**β.** Για κάθε τριάδα συναρτήσεων  $f, g, h$  για τις οποίες ορίζεται η  $h \circ (g \circ f)$ , τότε αναγκαστικά ορίζεται και η  $(h \circ g) \circ f$  και είναι σε κάθε περίπτωση ίσες δηλαδή ισχύει ότι  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

( 1 μονάδα η σωστή απάντηση)

**Μονάδες 1**

**γ.** Για κάθε συνάρτηση  $f(x) = a^x$ , με  $a > 1$  ισχύει ότι  $a^x > x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

( 1 μονάδα η σωστή απάντηση 3 μονάδες η αιτιολόγηση)

**4 Μονάδες**

**δ.** Για κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , και για το  $x_0 \in \mathbb{R}$ , ισχύει ότι  $f''(x_0) \neq 0$ , τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  δεν είναι σημείο καμπής της  $f$

( 1 μονάδα η σωστή απάντηση 1 μονάδα η αιτιολόγηση)

**2 Μονάδες**

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \sqrt{x}$  και  $g(x) = \ln x^2 - (\ln|x|)^2$ ,  $x \in D_g$

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $D_g$  της  $g$ .

**Μονάδες 3**

**B2.** Να ορίσετε τη σύνθεση της  $g$  με την  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B3.** Να δείξετε ότι  $\frac{\pi}{\pi^2} \cdot \frac{e}{e^2} > \frac{e}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{e^2}$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f \circ g$  με τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 5**



B5. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(f \circ g)^2(x)}{x-1}$

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι **συνεχής στο  $\mathbb{R}$** , παραγωγίσιμη για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ , για την οποία ισχύουν ότι

- $x \cdot f'(x) + x = 2f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$
- η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και  $f''(0) = \frac{1}{2}$

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης προς τη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε την  $f$

Μονάδες 7

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση  $e^{x+2} + f(x) \leq x + 2$ , με  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$ , τον άξονα  $x'x$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = \pi$

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x - \ln(x+1)$ ,  $x > -1$ ,

$$H(x) = e^{\sqrt{f(x) + \ln(x+1)}}, x \geq 0$$

Δ1. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

Δ2. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να εξετάσετε αν έχει σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Δ3. Αν  $\lambda > 0$ , να δείξετε ότι η εξίσωση  $(x - \lambda) \cdot (f(x^2) + f(\lambda^2)) = 2f(\lambda \cdot x)$ , με  $x > 0$ , έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα  $(\lambda, \lambda + 1)$ .

Μονάδες 4

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{H(x+1) \cdot \eta\mu(f(x) + \ln(x+1))}{H(x) \cdot f(x) + H(x) \cdot \ln(x+1)}$

Μονάδες 4

Δ5. Να δείξετε ότι  $\int_0^3 \frac{H(x+1)}{H(x)} dx > 4$

Μονάδες 6



Δ4. εναλλακτικό Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [H(x+1) - H(x)]$

Μονάδες 4

©2021 Βασίλης Γ. Κουγιουμτσιάδης

### Αντιστροφή

Μνήμη Αλέξανδρου Γρηγορόπουλου

Οι μάγοι απόψε ξαγρυπνούν  
τραγούδια σου κεντάνε  
σε μαύρο φόντο μιλάνε ακέφαλες φωνές  
το σπόρο βάλθηκαν να κρύψουν

Τα καντήλια ανάβουν σιγαστήρες  
σελίδες καίνε. καίγονται.  
φουντώνουν οι απουσίες  
τ' αντεστραμμένα πέρατα λογχίζουν καταιγίδες

Οι μάγοι απόψε ξαγρυπνούν  
Δεν άλλαξε τίποτα ήσυχα κοιμήσου  
δάκρυα δηλητήριο ποτίζουν το λουλούδι της πέτρας  
κι αυτό επίμονα ανθίζει,...