

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2<sup>ο</sup> – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π Γ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α:**

**A.1]** Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία. **(Μονάδες 6)**

**A.2]** Έστω μία συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α,β]$ . Να αποδείξετε ότι, αν:

- Η  $f$  συνεχής στο  $[α,β]$
- $f(α) \neq f(β)$

Τότε για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$ , υπάρχει, τουλάχιστον ένας αριθμός  $x_0 \in (α, β)$ , ώστε  $f(x_0)=\eta$ .

**(Μονάδες 7)**

**A.3]** Εκφράστε με  $\Sigma$  ή  $\Lambda$ :

α) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $[α,β]$  και συνεχής στο  $(α,β)$ , τότε η  $f$  παίρνει πάντοτε στο  $[α,β]$ , μία μέγιστη τιμή.

β) Κάθε συνάρτηση που είναι '1-1' στο πεδίο ορισμού της, είναι και γνησίως μονότονη.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ , ως προς  $x$  για  $x=1$ , ισούται με  $\frac{1}{4}$

δ) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $C_f$ , στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ , τέμνει τον  $x'$ , τότε το  $A$  δεν είναι ούτε ακρότατο, ούτε στάσιμο σημείο.

ε) Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n\mu x}{x} = 1$

στ) Ισχύει ότι  $(f(g(x)))' = f(g(x)) \cdot g'(x)$

(Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ Β:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x, & x \leq 1 \\ 3 - 2\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}$

**B.1]** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0=1$ , αν και μόνο αν ισχύει  $\alpha+\beta=1$ .  
(Μονάδες 5)

**B.2]** Να βρείτε τα  $\alpha, \beta$  αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0=1$ .

(Μονάδες 5)

**B.3]** Για τα  $\alpha, \beta$  που βρήκατε στο B.2:

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $\epsilon$  της  $c_f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $\epsilon'$  της  $c_f$  η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία ( $\eta$ ):  $y=x+2022$

(Μονάδες 10)

**B.4]** Να εξηγήσετε γιατί η  $\epsilon$  είναι κάθετη με την  $\epsilon'$  και να βρείτε το σημείο τομής τους.

(Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ Γ:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^7+x+1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ.1]** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=0$ , έχει μοναδική ρίζα.

**(Μονάδες 4)**

**Γ.2]** Να αποδείξετε ότι η  $c_f$ , τέμνει την ευθεία  $y=5x-2$ , τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0,1)$

**(Μονάδες 5)**

**Γ.3]** Να εξηγήσετε γιατί η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το  $A_{f^{-1}}$

**(Μονάδες 3)**

Έπειτα αν θεωρήσουμε ότι η  $f^{-1}$ , είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι η ευθεία  $y = \frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$ , είναι εφαπτομένη της  $c_{f^{-1}}$ , στο  $x_1=3$ . **(Μονάδες 5)**

**Γ.4]** Υλικό σημείο  $M$  κινείται επί της  $\varepsilon$  του (Γ.3) και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό  $8\text{cm/sec}$ . Να βρείτε:

i) την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο  $A(3,1)$ . (δηλαδή τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης  $OM$ ).

ii) Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που σχηματίζουν το  $M$ , οι προβολές του  $M$  στους άξονες και η αρχή  $O$ , την χρονική στιγμή που το  $M$  διέρχεται από το  $A$ . **(Μονάδες 8)**

**ΘΕΜΑ Δ:**

Έστω συνεχείς συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν

- Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $-1$  και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $M(-1, f(-1))$ , έχει εξίσωση  $\varepsilon: 12x+y+8=0$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)+3x^2}{\sqrt{x+5}-2}$ .

**Δ.1]** Υπολογίστε τις τιμές  $f'(-1)$  και  $f(-1)$ . **(Μονάδες 7)**

**Δ.2]** Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $-1$  και να βρείτε την εφαπτομένη της  $c_g$  στο σημείο  $N(-1, g(-1))$ . **(Μονάδες 6)**

**Δ.3]** Υπολογίστε το όριο :  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) \cdot g(x) + 12}{x+1}$  **(Μονάδες 5)**

**Δ.4]** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = x \cdot f(x) - x \cdot g\left(\frac{-x-1}{2}\right) + (x^2 - 1)g(x) + (x^2 - 1)f(x+1) + \frac{x^2}{2}$$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $h(-1)+h(0)+h(1)$

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $h(x)=0$ , έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα  $[-1,1]$ . **(Μονάδες 7)**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!**