ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΓΘ2)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. **(Μονάδες 8)**

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής. **(Μονάδες 3)**

Α3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο A και δεν μηδενίζεται, τότε διατηρεί πρόσημο σε αυτό». Να τον χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε τον χαρακτηρισμό. **(1+3 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τις παρακάτω προτάσεις:

α. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.

β. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και γνήσια μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό.

γ. Αν μια συνάρτηση f , συνεχής στο [α, β] , έχει ρίζα στο διάστημα (α, β) , τότε f(α)f(β)<0.

δ. Για μια συνάρτηση f , η οποία είναι ασυνεχής σε σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, το όριο της στο x_o είναι συν άπειρο ή πλην άπειρο ή δεν υπάρχει.

ε. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο ίδιο διάστημα Δ, τότε και η σύνθεσή της f με την g είναι επίσης συνεχής στο Δ. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση:

$(x-1)f(x)=\eta\mu(x-1)+x^2-4x+3,\ x\in\mathbb{R}-\{1\}.$

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}+x-3, & x\neq 1\\ -1, & x=1\end{cases}$ **(9 μονάδες)**

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2, 3). **(8 μονάδες)**

Β3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια: *i.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ *ii.* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x+3}{(x-1)^2}$ **(4+4 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γα

Αν για την συνεχή στο R συνάρτηση f γνωρίζουμε ότι:

$f^2(x)-2\eta\mu x\cdot f(x)=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x\ \ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x\in\mathbb{R}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f(0)=-1$, τότε:

Γ1. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f. **(10 μονάδες)**

Έστω $f(x)=\eta\mu x-\sqrt{x^2+1}$

Γ2. Να αποδείξετε ότι f(x)<0 για κάθε x πραγματικό αριθμό. **(7 μονάδες)**

Γ3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ *ii.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γβ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+2,\ x\in(0,1]$

Δ1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της **(8 μονάδες)**

Δ2. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού α, η εξίσωση $f(x)=\alpha^2-3\alpha+3$ έχει ακριβώς μία λύση. **(9 μονάδες)**

Δ3. Αν η εξίσωση f(x)=lnk, k>0, είναι αδύνατη να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{(k-e)x}$ **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δα

Δίνεται η παραβολή $f(x)=x^2$ *και η ευθεία* $y=ax-1,\ a\in(0,2)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. **(9 μονάδες)**

Δ2. Έστω σημείο $M(x,f(x))$, *με* $x\in[-a,a]$ το οποίο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης d(x) που δίνει την απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία. **(8 μονάδες)**

Δ3. Να δικαιολογήσετε ότι υπάρχουν σημεία $x_1,x_2\in[-a,a]$ ώστε η απόσταση $d(x_1)$ να γίνεται μεγαλύτερη από κάθε άλλη και η απόσταση $d(x_2)$ να είναι μικρότερη από κάθε άλλη απόσταση d(x). **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δβ

Για μια συνεχή στο R συνάρτηση f ισχύουν: $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x}=k,\ k\in\mathbb{R}$ *και* $\left(\frac{f(x)}{2}\right)^2+xf(x)=1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=2(\sqrt{x^2+1}-x)$ και να βρείτε το k. **(5+3 μονάδες)**

Δ2. Αν $\alpha+\beta=-\frac{1}{2}$, να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha}{x+5}+\frac{\beta}{x+5}\right)f(x)$ **(7 μονάδες)**

Δ3. Για την συνάρτηση με τύπο $g(x)=f(x)+2x,\ x\in\mathbb{R}$ να βρείτε τη μονοτονία της **(4 μονάδες)** και να λύσετε την ανίσωση: $g(g(x))\geq2\sqrt{2}$ **(6 μονάδες)**