ΘΕΜΑ Β

Β1) Για $x \neq 1$, είναι : $f(x) = \dfrac{\eta\mu(x-1)+x^2-4x+3}{x-1} = \dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} + \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$

$= \dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} + \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} + x - 3$. Η f συνεχής , οπότε : $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} + x - 3\right] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} + \lim\limits_{x\to 1}(x-3) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} - 2$

$\overset{x-1=u}{\underset{u\to 0}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u} - 2 = 1 - 2 = -1$. Τελικά : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} + x - 3, & x \neq 1 \\ -1, & x = -1 \end{cases}$

Β2) Για την f ισχύουν :

- Η συνάρτηση συνεχής στο $[2,3]$, ως πράξεις συνεχών
- $f(2) = \dfrac{\eta\mu(2-1)}{2-1} + 2 - 3 = \eta\mu 1 - 1 \prec 0$ και $f(3) = \dfrac{\eta\mu(3-1)}{3-1} + 3 - 3 = \dfrac{\eta\mu 2}{2} \succ 0$. Συνεπώς $f(2)\cdot f(3) \prec 0$, επομένως ισχύουν όλες οι προϋποθέσεως του θεωρήματος Bolzano , οπότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(2,3)$.

Β3)

➢ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} + x - 3}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x(x-1)} + 1 - \dfrac{3}{x}\right] = L$

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{3}{x}\right) = 0$ και
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x(x-1)} \overset{x-1=u}{\underset{u\to +\infty}{=}} \lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u(u+1)} = \lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u^2+u} = \lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{1}{u^2+u}\cdot\eta\mu u$ (περίπτωση μηδενικής επί φραγμένης), οπότε θα ισχύει : $\left|\dfrac{\eta\mu u}{u^2+u}\right| \leq \dfrac{1}{u^2+u}$

  $\overset{\text{ιδιοτ}}{\underset{\text{απολ}}{\Rightarrow}} -\dfrac{1}{u^2+u} \leq \dfrac{\eta\mu u}{u^2+u} \leq \dfrac{1}{u^2+u}$ και : $\lim\limits_{u\to +\infty}\left(-\dfrac{1}{u^2+u}\right) = \lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{1}{u^2+u} = 0$. Από Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u^2+u} = 0$, συνεπώς $L = 0 + 1 - 0 = 1$

➢ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x+3}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} + x - 3 - x + 3}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)^3}$

$\overset{x-1=u}{\underset{u\to 0}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u^3} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}\cdot\dfrac{1}{u^2} = 1\cdot(+\infty) = +\infty$, αφού $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$ και $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u^2} = +\infty$.

ΘΕΜΑ Γα

Γ1) Η δοθείσα σχέση $f^2(x)-2\eta\mu x\cdot f(x)=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ γίνεται :

$f^2(x)-2\eta\mu x\cdot f(x)+\eta\mu^2 x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x \Leftrightarrow \left(f(x)-\eta\mu x\right)^2=x^2+1 \Leftrightarrow \left|f(x)-\eta\mu x\right|=\sqrt{x^2+1}$

(1). Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta\mu x$, για την οποία ισχύει : η $g(x)\neq 0$ και συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Συνεπώς θα διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή

$g(0)=f(0)-\eta\mu 0=-1\prec 0$, θα είναι και $g(x)\prec 0$. Επομένως η (1) γίνεται : $f(x)-\eta\mu x=-\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x-\sqrt{x^2+1}$.

Γ2) $\eta\mu^2 x\leq x^2 \Rightarrow \eta\mu^2 x\prec x^2+1 \Rightarrow |\eta\mu x|\prec\sqrt{x^2+1} \Rightarrow -\sqrt{x^2+1}\prec\eta\mu x\prec\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \eta\mu x-\sqrt{x^2+1}\prec 0$

$\Rightarrow f(x)\prec 0$, για κάθε $x\in R$.

Γ3) Είναι :

i. $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\eta\mu x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\eta\mu x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\overset{x\succ 0}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\eta\mu x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\eta\mu x}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=L$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}\to$ περίπτωση μηδενικής επί φραγμένης , οπότε : $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|}$

  $\Rightarrow -\frac{1}{|x|}\leq\frac{\eta\mu x}{x}\leq\frac{1}{|x|}$ και επειδή : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$, από Κριτήριο Παρεμβολής,

  θα είναι : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$. Επιπλέον : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$, οπότε

  $L=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)(0-1)=-\infty$.

ii. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x-\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\eta\mu x}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]=0-1=-1$$

ΘΕΜΑ Δα

Δ1) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $x^2=\alpha x-1$, με $\alpha\in(0,2)$, είναι αδύνατη. Η εξίσωση γίνεται :

$x^2-\alpha x+1=0$, με $\Delta=(-\alpha)^2-4=\alpha^2-4\prec 0$, αφού $\alpha\prec 2$, συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη, οι γραφικές παραστάσεις της ευθείας και της παραβολής δεν έχουν κανένα κοινό σημείο .

Δ2) Το σημείο Μ κινείται στην παραβολή, οπότε $\mathrm{M}\left(x,x^2\right)$ και η απόσταση από την ευθεία είναι :

$$d(\mathrm{M},\varepsilon)=\frac{|\alpha x-x^2-1|}{\sqrt{\alpha^2+1}}\Rightarrow d(x)=\frac{|\alpha x-x^2-1|}{\sqrt{\alpha^2+1}}\Rightarrow d(x)=\frac{|x^2-\alpha x+1|}{\sqrt{\alpha^2+1}}.$$

Δ3) Η συνάρτηση $d(x)$, λόγω συνέχειας στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$, θα παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο στο διάστημα αυτό, άρα θα υπάρχει $x_1 \in [-\alpha,\alpha]$ τέτοιο ώστε $d(x_1) = d_{\max}$ και $x_2 \in [-\alpha,\alpha]$ τέτοιο ώστε $d(x_2) = d_{\min}$