

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπωθεί το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

(5 Μονάδες)

A2. Να διατυπωθεί το FERMAT και να γίνει η απόδειξη του.

(3+5 Μονάδες)

A3.

α. Να χαρακτηριστεί ως Σωστό ή Λάθος η πρόταση:

αν $f'(x) < 0$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό και στη συνέχεια, να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

(2+4 Μονάδες)

β. Να χαρακτηριστούν ως Σωστό ή Λάθος οι προτάσεις:

i) Αν η f είναι ΚΥΡΤΗ στο \mathfrak{X} τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{X}$

ii) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{X}$ τότε $f(\downarrow)$ στο \mathfrak{X}

iii) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{X}$ τότε η f δεν αντιστρέφεται στο \mathfrak{X} .

(6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο \mathfrak{X} για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 0$
- $f'(x) = 2x \cdot e^{-f(x)}$, για κάθε $x \in \mathfrak{X}$

B1. Ναδειχθεί ότι $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathfrak{X}$ και στη συνέχεια, αν x_1, x_2 οι θέσεις των σημείων καμπής της C_f και x_3 η θέση του ακρότατου, ναδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

(4+4 Μονάδες)

B2. Αν $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$, $x \in \mathfrak{X}$, ναδειχθεί ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $N(0, g(0))$

(8 Μονάδες)

B3. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) \cdot f(x))$

(9 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x}, & x \geq 0 \\ \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}, & x < 0 \end{cases}$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
(8 Μονάδες)

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.
(6 Μονάδες)

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
(4 Μονάδες)

Γ4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.)
(7 Μονάδες)

Δίνονται: $\frac{1}{e} \approx 0,37$, $\frac{2}{e^2} \approx 0,27$ και $\sqrt{2} \approx 1,41$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο \mathfrak{R} με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{t \rightarrow x} \frac{x \cdot f(t) - t \cdot f(x)}{t - x} = (x - 1) \cdot e^x$, για κάθε $x \in \mathfrak{R}$
- $f(1) = e - \lambda$ και $f(-1) = \frac{1}{e} + \lambda$, $\lambda > 0$

Δ1. Ναδειχθεί ότι $f(x) = e^x - \lambda x$, $x \in \mathfrak{R}$
(8 Μονάδες)

Δ2.

α) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της f .
(3 Μονάδες)

β) Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει: $e^x \geq \lambda x$, για κάθε $x \in \mathfrak{R}$
(3 Μονάδες)

Δ3. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{4} \cdot f(2x^2 - 1) + \frac{1}{2} \cdot f(1 - x^2), \quad x \in \mathfrak{R}, \quad \lambda = 1$$

α) Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
(6 Μονάδες)

β) Να λυθεί η εξίσωση: $4 \cdot g(x) + 1 = 3 \cdot \sqrt[3]{e}$
(5 Μονάδες)

Καλά Αποτελέσματα!

**Από την Ομάδα Μαθηματικών
του Εκπαιδευτικού Οργανισμού**