

**3<sup>Η</sup> ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΚΥΡΙΑΚΗ 18 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2021**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι αν για μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  ισχύουν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος, ώστε:  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 6**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  **δεν** είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 3**

**A3.** Θεωρείστε τους επόμενους τρεις (3) ισχυρισμούς:

**α)** «Μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  είναι συνεχής στο  $\alpha$  και στο  $\beta$ ».

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής (Μονάδα 1), αιτιολογώντας την απάντησή σας (Μονάδες 2).

**Μονάδες 3**

**β)** «Αν οι συναρτήσεις  $f+g$  και  $f-g$  είναι συνεχείς στο  $x_0$ , τότε οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς στο  $x_0$ ».

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής (Μονάδα 1), αιτιολογώντας την απάντησή σας (Μονάδες 2).

**Μονάδες 3**

**γ)** «Η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^3 + \pi, & \text{αν } x > 0 \\ x^3 - \pi, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$  είναι συνεχής.»

## ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής (Μονάδα 1), αιτιολογώντας την απάντησή σας (Μονάδες 2).

### Μονάδες 3

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν για τη συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $f(\alpha) < 0$  και  $f(\beta) > 0$ , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 0$ .

**β)** Αν για τη συνεχή συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $f(\alpha)f(\beta) < 0$ , τότε η γραφική παράσταση  $C_f$  τη συνάρτησης  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ .

**γ)** Αν η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 0$ , η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο.

**δ)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**ε)** Αν η συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in A$ , τότε η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $A$ .

### Μονάδες 5

**A5.** Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη **μοναδική** σωστή απάντηση.

**α)** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$  και  $g(x) = \frac{1}{(x^2-1)}$ . Από τους παρακάτω

ισχυρισμούς λανθασμένος είναι ο:

**A.** η  $g$  είναι συνεχής στο 2

**B.** η  $f$  είναι συνεχής στο 1

**Γ.** η  $g$  έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

**Δ.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

**β)** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο διάστημα  $\Delta = [0,3]$  με  $f(0)=2$ ,  $f(1)=1$  και  $f(3)=-1$ . Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

**A.**  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$

**B.**  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

**Γ.**  $[-1,2] \subseteq f(\Delta)$

**Δ.** Η μέγιστη τιμή της  $f$  στο  $[0,3]$  είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το -1.

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 & , |x| \leq 1 \\ \frac{4-\alpha}{x} & , |x| > 1 \end{cases}$ , η οποία είναι συνεχής στο 1 και η εξίσωση

$$\frac{e}{x} + \frac{\pi}{x-1} + \frac{e \cdot \pi}{x+1} = 0 \quad (1).$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha=2$  (Μονάδες 3) και στη συνέχεια να εξετάσετε εάν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής (Μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

**B2.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση 1 έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα  $(-1,1)$ .

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν:

- $x \cdot f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + 2f(x) - 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = (|ημx| - |x|)^{2022} (x - \pi)^{2024}$
- $h^2(x) + 2x = x^2 + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ1. α)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  (Μονάδες 4) και να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (Μονάδες 2).

**Μονάδες 6**

**β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = \frac{2021}{2022}$  έχει μια τουλάχιστον θετική λύση.

**Μονάδες 3**

**Γ2. α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  έχει δύο θέσεις ελαχίστου, τις οποίες και να βρείτε.

**Μονάδες 4**

**β)** Θεωρείστε τη συνάρτηση  $g$  στο  $[0, \pi]$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  παρουσιάζει μέγιστο στο εσωτερικό του διαστήματος  $[0, \pi]$ .

**Μονάδες 3**

**Γ3.** Να λυθεί η εξίσωση  $h(x) - \frac{3}{2}f(2) = g(0) - 1$  (Μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε όλους τους τύπους της συνάρτησης  $h$  στο  $\mathbb{R}$  (Μονάδες 7).

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $x \cdot f(x) - \eta\mu(\pi x) \leq x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + \pi x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$
- $f^2(x) - 2\pi f(x) = x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 2\pi$ .

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

Δίνεται επιπλέον, η συνάρτηση  $g(x) = f(x) + e^{|x|}$ .

**Δ3.** Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης  $g$  σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $g(x) = 2021$  έχει ακριβώς δύο ρίζες.

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΙ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**