

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1, Ζωγράφου  
☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13, Χολαργός  
☎ 210 65 36 551

Ημερομηνία : 3 – 1 – 2022

Βαθμός :

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Θέμα Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

**A3.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός :

« Η εικόνα  $f(\Delta)$ , ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα ».

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς

- α) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$  και  $f'(x) \neq 0$  για όλα τα  $x \in (0,1)$  τότε  $f(0) \neq f(1)$
- β) Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές της ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της
- γ) Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο  $t_0$  είναι  $u(t_0) > 0$
- δ) Η συνάρτηση  $g(x) = \frac{1}{x^2-4}$  έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής
- ε) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και δεν είναι αντιστρέψιμη τότε υπάρχει κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  στο οποίο η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle

Μονάδες : 6 – 5 – 4 – 10



1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1, Ζωγράφου  
☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13, Χολαργός  
☎ 210 65 36 551

www.en-dynamei.gr

---

### Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 1)$ ,  $x > 0$ .

**B1.** Να βρείτε την σύνθεση  $f \circ f$ .

**B2.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1 και να βρείτε την αντιστροφή της .

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**B4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\ln(e^x + 1) + f(f^{-1}(x)) + x^2 - 2 = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$ .

Μονάδες : 6 – 7 – 6 – 6

### Θέμα Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + x, & x < 1 \\ 2x^2 + \beta, & x \geq 1 \end{cases}$

**Γ1.** Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 0$

**Γ2.** Να βρείτε την  $f'(x)$  και στην συνέχεια να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Γ3.** Να λυθεί η ανίσωση  $f(2\sin x - 1) < 0$  στο σύνολο  $[0, \pi]$ .

**Γ4. Για  $x \geq 1$**

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  που διέρχεται από το σημείο  $A(0, -2)$ .

(4 μονάδες)

β) Ένα κινητό  $M$  ξεκινά από το σημείο  $(1,2)$  και κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \geq 1$ . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταμένης  $y$  του  $M$  είναι 8-πλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταμένης του  $x$ , αν υποτεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ . (4 μονάδες)

Μονάδες : 6 – 6 – 5 – 8

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1, Ζωγράφου  
☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13, Χολαργός  
☎ 210 65 36 551

www.en-dynamei.gr

---

## Θέμα Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :

- $f(f'(x)) = 4$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) \neq 4$

**Δ1.** α) Να δείξετε ότι  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . (2 μονάδες)

β) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι  $1 - 1$ . (4 μονάδες)

**Δ2.** Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $f'$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$f^{-1}((x-1) \cdot f'(\alpha) - (2-x) \cdot f'(\beta) + 4) = f'(\alpha)$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(1,2)$ .

Αν επιπλέον  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - f(-2) \cdot x) = 0$  και  $f(x) = \lambda x + \lambda^2 + 2^\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$   
τότε :

**Δ3.** α) Να αποδείξετε ότι  $f(-2) = 1$ . (3 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . (5 μονάδες)

**Δ4.** Αν  $g$  είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$ , να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (-3, -2)$  τέτοιο ώστε  $g'(\xi) = \frac{2\xi+5}{f(\xi) \cdot f(\xi-1)}$ .

Μονάδες : 6 – 6 – 8 – 5

