

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
6<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΘΕΜΑΤΑ**

[Κεφάλαια 1 & 2 μέχρι τη παράγραφο 2.7 του σχολικού βιβλίου]

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Δίνεται ότι  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \alpha$  τότε  $\alpha = 1$ .

**α).** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

**Μονάδες 1**

**β).** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

**Μονάδες 3**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λάθος.

**α).** Για κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  ισχύει η σχέση  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**β).** Αν ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \ell \in \mathbb{R}^*$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  ή  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\ell$ .

**γ).** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $(\alpha, \beta)$  και επιπλέον  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$  τότε η  $f$  παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο  $[\alpha, \beta]$ .

**δ).** Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι το ολικό της ελάχιστο.

**ε).** Αν για τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε ισχύει πάντα  $f \circ g = g \circ f$ .

**Μονάδες 2x5=10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x)$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**B1.** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

**B2 i)** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \ln \alpha^2$  για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

Μονάδες 5

**ii)** Στην περίπτωση που η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες  $x_1, x_2$  ακριβώς, να δείξετε ότι  $x_1 + x_2 = 0$ .

Μονάδες 4

**B3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - 1}$ .

Μονάδες 5

**B4.** Να δείξετε ότι  $f(x) \geq \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\sigma\upsilon\nu x}$  για κάθε  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία έχει τις ιδιότητες:

- Είναι πολυωνυμική βαθμού  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3 \eta\mu \frac{1}{x}} = 1$ .
- $f(x) = f(1-x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x^2 - x$  και να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h(x) = f(|x|)$ .

Μονάδες 9

Γ2. Να υπολογίσετε αν υπάρχει το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{f(x)} - \eta\mu x)$ .

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 2)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = e \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{12}$ .

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(g(x)) = -\frac{1}{4}$  με  $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - \frac{5}{2}$ .

Μονάδες 6

#### ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση  $f: (0, +\infty)$  και παραγωγίσιμη σε αυτό, για την οποία ισχύει:

•  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+5h) - f(x-3h)}{\eta\mu 8h} = 1 + \frac{f(x)}{x}, x > 0.$

•  $f(1) = 1.$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+5h) - f(x-3h)}{\eta\mu 8h} = f'(x).$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = x \ln x + x.$

Μονάδες 4

Δ3. Ένα σημείο  $M(x, y)$  με  $x > 0$  κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και έστω  $A$  η προβολή του σημείου  $M$  στον άξονα  $x'x$ . Το σημείο  $A$  απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$  με ρυθμό  $1 \text{ cm/sec}$ . Τη χρονική στιγμή  $t_0$  που η τετμημένη του  $M$  είναι  $e$  να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

α) της απόστασης  $AM$  και β) της γωνίας  $M\hat{O}A$

Μονάδες 3+3=6

Δ4. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τριάδα αριθμών  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$  με  $\alpha < \beta < \gamma$  ισχύει  $(\gamma - \beta)(f(\beta) - f(\alpha)) < (\beta - \alpha)(f(\gamma) - f(\beta)).$

Μονάδες 4

Δ5. Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 0$  και το σημείο  $A(2, 0)$ .

α). Να βρείτε σημείο  $M$  της  $C_g$  που απέχει από το σημείο  $A$  τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 4

β). Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_g$  στο  $M$  είναι κάθετη στην  $AM$ .

**Μονάδες 2**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών.

Τα θέματα επιμελήθηκε ο **Παντελής Ανδρέας**, Μαθηματικός - MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.