# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
# 6ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**[Κεφάλαια 1 & 2 μέχρι τη παράγραφο 2.7 του σχολικού βιβλίου]**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελ.133

**Α2.** Σχολικό βιβλίο σελ.140

**Α3. α).** Α

**β).** Έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=\alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=\alpha \Rightarrow f'(1)=\alpha$ με $f(x)=\ln x$ οπότε

$f'(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(1)=1=\alpha$ άρα $\alpha=1$

**Α4. α).** Λάθος, **β).** Λάθος, **γ).** Σωστό, **δ).** Λάθος, **ε).** Λάθος.

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $f'(x)=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}=-\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Είναι $\sigma\upsilon\nu x>0$ για $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ , $\eta\mu x>0$ με $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $\eta\mu x<0$ με $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

Επομένως θα είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1=\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Οπότε η $f$ παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x=0$ το $f(0)=\ln(\sigma\upsilon\nu 0)=\ln 1=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\ln(\sigma\upsilon\nu x)\overset{(\sigma\upsilon\nu x=u)}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\ln(\sigma\upsilon\nu x)\overset{(\sigma\upsilon\nu x=u)}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$.

| $x$ | $-\pi/2$ | | $0$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | $0$ | - | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$.μ | $\searrow$ | $-\infty$ |

- Η $f$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$, άρα

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x), f(0)\right]=(-\infty,0].$$

- Η $f$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x), f(0)\right]=(-\infty,0].$$

Επομένως σύνολο τιμών της $f$ είναι το $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,0]\cup(-\infty,0]=(-\infty,0]$ όπου $A=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

**Β2.** **(i)** Θα βρούμε πότε ισχύει: $\ln\alpha^2\in f(A_1), f(A_2)$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• Αν $\ln\alpha^2>0\Leftrightarrow\alpha^2>1\Leftrightarrow|\alpha|>1\Leftrightarrow\alpha<-1$ ή $\alpha>1$ τότε αφού $\ln\alpha^2\notin f(A_1), f(A_2)$ η εξίσωση είναι αδύνατη

• Αν $\ln\alpha^2=0\Leftrightarrow\alpha^2=1\Leftrightarrow\alpha=-1$ ή $\alpha=1$ τότε, από το (Β1), αφού η $f$ παρουσιάζει μέγιστο μόνο στη θέση $x=0$ το $f(0)=0$ η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το η $x=0$

• Αν $\ln\alpha^2<0\Leftrightarrow\alpha^2<1\Leftrightarrow|\alpha|<1\Leftrightarrow-1<\alpha<1$ και $\alpha\neq0$, τότε αφού $\ln\alpha^2\in f(A_1), f(A_2)$ και η είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1, A_2$ η εξίσωση θα έχει δύο ρίζες ακριβώς.

**(ii)** Από το ερώτημα (i) για $\alpha\in(-1,1)-\{0\}$ υπάρχει ακριβώς ένα $x_1\in A_1=\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ και ακριβώς ένα $x_2\in A_2=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$.

**1ος τρόπος**

Η συνάρτηση όμως $f(x)=\ln(\sigma\upsilon\nu x), x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι άρτια αφού:

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ το $-x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και $f(-x)=\ln(\sigma\upsilon\nu(-x))=\ln(\sigma\upsilon\nu x)=f(x)$

Επομένως $f(-x_1)=f(x_1)=0$ , άρα $x_2=-x_1 \Leftrightarrow x_1+x_2=0$ που σημαίνει ότι οι ρίζες είναι αντίθετες.

**2ος τρόπος**

$$\begin{cases} f(x_1)=\ln\alpha^2 \\ f(x_2)=\ln\alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu x_1)=\ln(\sigma\upsilon\nu x_2) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_1=\sigma\upsilon\nu x_2 .$$

Τότε $x_1=2\kappa\pi\pm x_2 \overset{\kappa=0}{\Rightarrow} x_1=\pm x_2 \overset{x_1\neq x_2}{\Rightarrow} x_1=-x_2 \Rightarrow x_1+x_2=0$.

**B3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1}=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1}\cdot\sigma\upsilon\nu x]=(-\infty).1=-\infty$

Γιατί:

$f(x)\le 0, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $\kappa\alpha\iota$ $\sigma\upsilon\nu x-1\le 0, x\in\mathbb{R}$ , άρα $f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1\le 0$ με $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1\right]=f(0)+1-1=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu x)=1>0$.

**B4.**

**1ος Τρόπος**

Θα δείξουμε ότι

$f(x)\ge\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow f(x)\ge\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow f(x)-1+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\ge 0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-1+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

$$g'(x)=f'(x)+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\eta\mu x-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Αφού $\sigma\upsilon\nu^2 x>0$ $\kappa\alpha\iota$ $1-\sigma\upsilon\nu x\ge 0, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ οι ρίζες και το πρόσημο της $g'$ εξαρτώνται από το $\eta\mu x$.

$g'(x)>0\Leftrightarrow \eta\mu x>0\Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $g'(x)<0\Leftrightarrow \eta\mu x<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

Επομένως η $g$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=0$ με

$$g(0)=f(0)-1+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0}=0-1+1=0\,.$$

Άρα $g(x)\ge g(0), x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)-1+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\ge 0, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

**2ος Τρόπος**

Θα αποδείξουμε ότι

$f(x)\ge\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu x)\ge\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\sigma\upsilon\nu x},(1)$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{h}>0$, οπότε η (1) γίνεται

$$\ln\frac{1}{h}\ge\frac{\frac{1}{h}-1}{\frac{1}{h}}\Leftrightarrow \ln 1-\ln h\ge\frac{\frac{1-h}{h}}{\frac{1}{h}}\Leftrightarrow -\ln h\ge 1-h\Leftrightarrow \ln h\le h-1\,.$$

Το οποίο ισχύει εφαρμογή 2 ii) παράγραφο 2.7 σχολικού βιβλίου σελ. 148.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2\cdot x\eta\mu\frac{1}{x}}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{x\eta\mu\frac{1}{x}}\right]=1\,.$$

Είναι $\lim_{x\to+\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{1}{x}=u\right)}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$.

Θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{x\eta\mu\frac{1}{x}}$ κοντά στο $+\infty$ με $\lim_{x\to+\infty}g(x)=1$ και $\frac{f(x)}{x^2}=g(x)\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)$.

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}[g(x)\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)]=1\cdot 1=1$ .(1)

Έστω $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ με $\alpha_\nu\ne 0$, τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{x^2}=\alpha_\nu\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\nu}{x^2}=\alpha_\nu\cdot\lim_{x\to+\infty}x^{\nu-2}=\begin{cases}\pm\infty, \alpha\nu\ \ \nu>2, \acute{\alpha}\tau o\pi o\\ \alpha_\nu, \alpha\nu\ \ \nu=2,\\ 0,\ \alpha\nu\ \ \nu<2, \acute{\alpha}\tau o\pi o\end{cases},$$

άρα $\nu = 2$ και $\alpha_\nu = 1$ από την (1).

Οπότε $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$.

- $f(x) = f(1-x) \overset{x=0}{\Rightarrow} f(0) = f(1) \Rightarrow \gamma = 1 + \beta + \gamma \Rightarrow \beta = -1$.

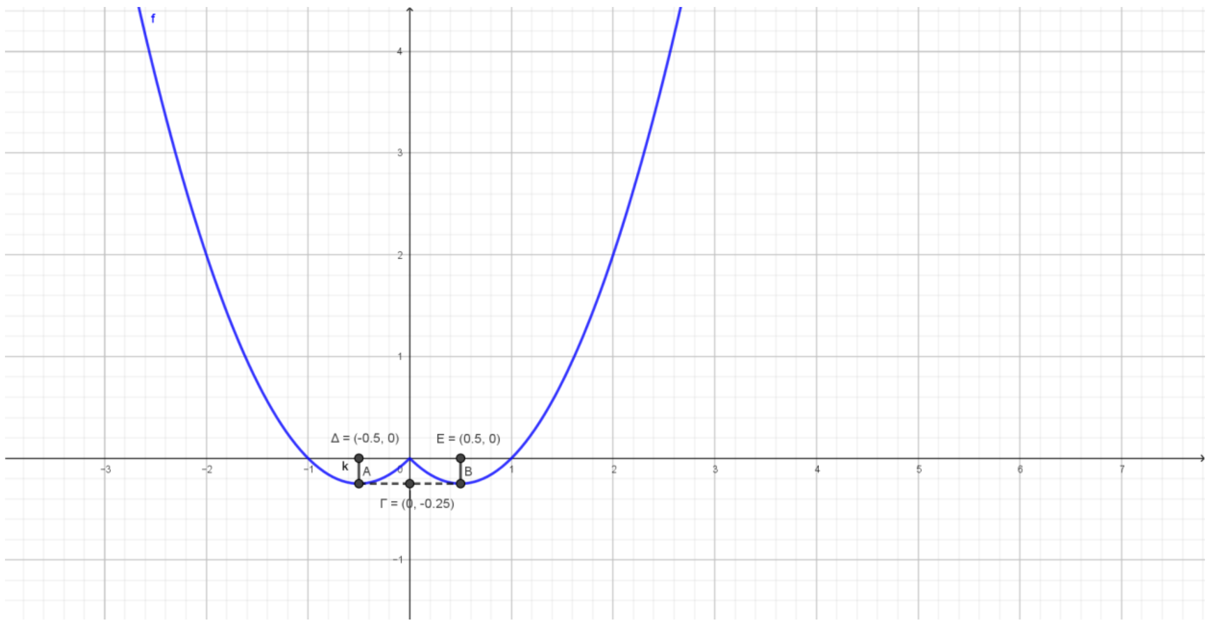
Οπότε $f(x) = x^2 - x + \gamma$.

- $M\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right) \in C_f \Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + \gamma = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \gamma = 0$, άρα $f(x) = x^2 - x,\ x \in \mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση $h(x) = f(|x|)$ είναι άρτια αφού $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$

Επομένως η $C_h$ συμπίπτει με την $C_f$ για τα $x \in [0, +\infty)$ και είναι συμμετρική της $C_f$ ως προς τον άξονα $x'x$ για τον «κλάδο» αυτό για τα $x \in (-\infty, 0]$.

- Εναλλακτικά: $h(x) = f(|x|) = |x|^2 - |x| = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 0 \\ x^2 + x, & x < 0 \end{cases}$




**Γ2.**
**1ος τρόπος**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f(x)} - \eta\mu x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2 - x} - \eta\mu x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)} - \eta\mu x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \eta\mu x\right) \overset{(x<0)}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \eta\mu x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \frac{\eta\mu x}{x}\right)\right] = (+\infty)(1+0) = +\infty$$

γιατί:

$-1 \le ημx \le 1 \overset{(x<0)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x} \le \frac{ημx}{x} \le -\frac{1}{x}$ και αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ημx}{x} = 0$ .

**2ος τρόπος**

**Ισχύει:** $-1 \le ημx \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -ημx \le 1$ και $0 \le \sqrt{f(x)} \Rightarrow \sqrt{f(x)} - 1 \le \sqrt{f(x)} - ημx$ . (1)

Και επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-1\right) = +\infty$, τότε από την $(1)$ 'εχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)} - ημx\right) = +\infty$

**Γ3.**

**1ος τρόπος**

Η $f$ είναι συνεχής στο $[0,2]$με $f(0)=0$ και $f(2)=2$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα $(f(0),f(2))=(0,2)$.

$(*)$ Η συνάρτηση $h(x)=συνx$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2} \overset{(*)}{\Rightarrow} συν\frac{\pi}{2} < συν\frac{5\pi}{12} < συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < συν\frac{5\pi}{12} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < e\cdot συν\frac{5\pi}{12} < \frac{e}{2} < 2$

Αφού $e\cdot συν\frac{5\pi}{12} \in (0,2)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e\cdot συν\frac{5\pi}{12}$ .

**2ος τρόπος**

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για την $g(x) = f(x) - e\cdot συν\frac{5\pi}{12}$ στο $[0,2]$.

**Γ4.** Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x$ παρουσιάζει ελάχιστο το $-\frac{1}{4}$ μόνο στη θέση $x = \frac{1}{2}$.

Οπότε $f(g(x)) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 3 = 0$ .

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3, x \in \mathbb{R}$ .

$h'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ .

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ .

Το πρόσημο της $h'$ και η μονοτονία της $h$ φαίνεται στον πίνακα

| x | $-\infty$ 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | + | − | + |
| $h(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ |

Άρα η $h$ είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,0],\Delta_3=[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=[0,1]$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1=0$ το $h(0)=-3$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2=1$ το $h(1)=2-3-3=-4$ .

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$

Άρα $h(\Delta_1)=(-\infty,-3],h(\Delta_2)=[-4,-3]$ και $h(\Delta_3)=[-4,+\infty)$.

Αφού το $0\in h(\Delta_3)=[-4,+\infty)$ η εξίσωση έχει μια και μοναδική ρίζα στο $\Delta_3=[1,+\infty)$.

## ΘΕΜΑ Δ΄

**Δ1.** Είναι $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Θέτουμε $h=5u$ και έχουμε $f'(x)=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(x+5u)-f(x)}{5u}\Leftrightarrow 5f'(x)=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(x+5u)-f(x)}{u}\qquad(1)$

Θέτουμε $h=-3u$ και έχουμε

$$f'(x)=\lim_{u\to0}\frac{f(x-3u)-f(x)}{-3u}\Leftrightarrow -3f'(x)=\lim_{u\to0}\frac{f(x-3u)-f(x)}{u}\qquad(2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις $(1),(2)$ και παίρνουμε

$$8f'(x)=\lim_{u\to0}\frac{f(x+5u)-f(x-3u)}{u}\Leftrightarrow f'(x)=\lim_{u\to0}\frac{f(x+5u)-f(x-3u)}{8u}\qquad(3)$$

Επίσης $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu 8u}{8u}\overset{(8u=y)}{=}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\eta\mu y}{y}=1\qquad(4)$

Επομένως $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{\eta\mu 8h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{8h}}{\dfrac{\eta\mu 8h}{8h}}\underset{(4)}{\overset{(3)}{=}}\dfrac{f'(x)}{1}=f'(x)$

**Δ2.** Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+5h)-f(x-3h)}{\eta\mu 8h}=1+\frac{f(x)}{x}\overset{(\Delta_1)}{\Rightarrow} f'(x)=1+\frac{f(x)}{x}\Rightarrow f'(x)-\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x}=1\Rightarrow$$

$$\overset{(x>0)}{\Rightarrow}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{1}{x}\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(\ln x)'\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\ln x+c$$

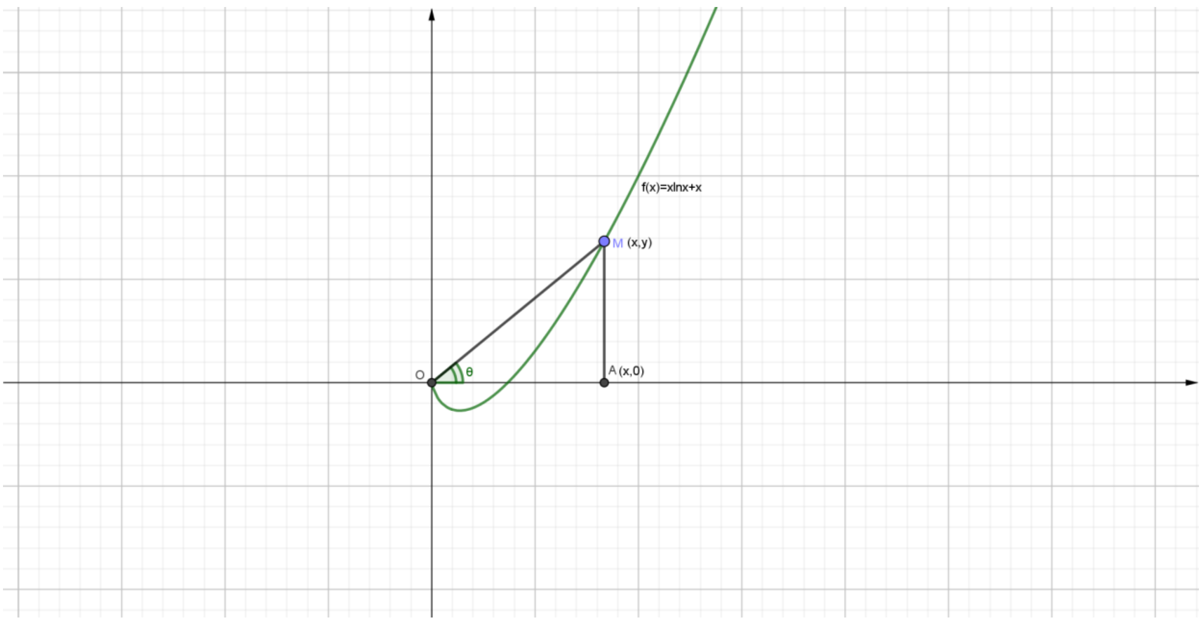
Για $x=1$: $\frac{f(1)}{1}=\ln 1+c\Leftrightarrow 1=c$,

άρα $\frac{f(x)}{x}=\ln x+1\Leftrightarrow f(x)=x(\ln x+1)\Leftrightarrow f(x)=x\ln x+x, x>0$.

**Δ3. α)** Είναι $f(e)=e\ln e+e=2e$

Αν $M(x,y)$, τότε θα είναι $A(x,0)$ με $x>0$.

Είναι $\overrightarrow{AM}=(x_M-x_A, y_M-y_A)=(x-x,y-0)=(0,y)$.




Η απόσταση ΑΜ είναι $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{y^2}=|y|=|f(x)|=|x\ln x+x|=|x(\ln x+1)|\overset{x>0}{=}x|\ln x+1|$.

Έστω $g(x)=x|\ln x+1|=\begin{cases} x\ln x+x & ,x\geq\frac{1}{e}\\ -x\ln x-x & ,0<x<\frac{1}{e}\end{cases}$

Έστω $M(x(t),y(t))$, τότε θα είναι $A(x(t),0)$ με $x'(t)=1cm/sec$

Έστω $t_0$ η χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του Μ είναι $e$ τότε:

$x(t_0)=e, y(t_0)=2e$.

Για $x\geq\frac{1}{e}$ η απόσταση ΑΜ είναι $y(t)=x(t)\ln x(t)+x(t)$ με

$$y'(t)=x'(t)\ln x(t)+x(t)\frac{x'(t)}{x(t)}+x'(t)=x'(t)\ln x(t)+2x'(t)$$

Για $t=t_0$ : $x'(t_0)=1\text{cm}/\sec$ και $y'(t_0)=x'(t_0)\ln x(t_0)+2x'(t_0)=1\cdot\ln e+2\cdot 1=3$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ΑΜ είναι $3\text{cm}/\sec$.

**β) 1ος τρόπος**

Έστω $\text{MOA}=\theta$ τότε $\varepsilon\varphi\theta=\frac{(\text{AM})}{(\text{OA})}=\frac{y}{x}$ και $\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{y(t)}{x(t)}$

Για $x\geq\frac{1}{e}$: $\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)'\Rightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{y'(t)\cdot x(t)-y(t)\cdot x'(t)}{x^2(t)}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\cdot\theta'(t)=\frac{y'(t)\cdot x(t)-y(t)\cdot x'(t)}{x^2(t)}.$$

Για $t=t_0$ :

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)\right)\cdot\theta'(t_0)=\frac{y'(t_0)\cdot x(t_0)-y(t_0)\cdot x'(t_0)}{x^2(t_0)}\Rightarrow\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)\right)\cdot\theta'(t_0)=\frac{3\cdot e-2e\cdot 1}{e^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)\right)\cdot\theta'(t_0)=\frac{1}{e}.$$

Αλλά $\varepsilon\varphi\theta(t_0)=\frac{y(t_0)}{x(t_0)}=\frac{2e}{e}=2$, άρα

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)\right)\cdot\theta'(t_0)=\frac{1}{e}\Rightarrow\left(1+2^2\right)\cdot\theta'(t_0)=\frac{1}{e}\Rightarrow\theta'(t_0)=\frac{1}{5e}\text{rad}/\sec.$$

**2ος τρόπος**

Έστω $\text{MOA}=\theta$ τότε $\varepsilon\varphi\theta=\frac{(\text{AM})}{(\text{OA})}=\frac{y}{x}$ , $\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{y(t)}{x(t)}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{(\text{OA})}{(\text{OM})}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\theta(t)=\frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)=\frac{x^2(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\quad(1)$$

Για $x\geq\frac{1}{e}$: $\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)'\Rightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{y'(t)\cdot x(t)-y(t)\cdot x'(t)}{x^2(t)}\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \theta'(t)=\frac{y'(t)\cdot x(t)-y(t)\cdot x'(t)}{x^2(t)}\bullet\frac{x^2(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Rightarrow \theta'(t)=\frac{y'(t)\cdot x(t)-y(t)\cdot x'(t)}{x^2(t)+y^2(t)}.$$

Για $t=t_0$: $\theta'(t_0)=\dfrac{y'(t_0)\cdot x(t_0)-y(t_0)\cdot x'(t_0)}{x^2(t_0)+y^2(t_0)}\Rightarrow \theta'(t_0)=\dfrac{3e-2e\cdot 1}{e^2+4e^2}=\dfrac{e}{5e^2}=\dfrac{1}{5e}\,\mathrm{rad/sec}$.

**3ος τρόπος**

Έστω $MOA=\theta$ τότε $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{(AM)}{(OA)}=\dfrac{y}{x}$ και $\varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}$.

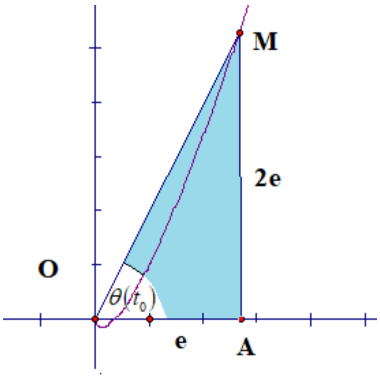
Για $x\geq\dfrac{1}{e}$: $\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right)'\Rightarrow\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\dfrac{y'(t)\cdot x(t)-y(t)\cdot x'(t)}{x^2(t)},(1)$

Στο τρίγωνο ΟΜΑ την χρονική στιγμή $t=t_0$ έχουμε

$OA=x(t_o)=e,\ \ AM=y(t_0)=2e$

$(OM)^2=(OA)^2+(AM)^2=e^2+(2e)^2=5e^2\Rightarrow$

$(OM)=e\sqrt{5},\ \ \text{οπότε}\ \ \sigma\upsilon\nu\theta(t_0)=\dfrac{(OA)}{(OM)}=\dfrac{e}{e\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}.$




Η (1) για $t=t_0$ γίνεται

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}\cdot\theta'(t_0)=\frac{y'(t_0)\cdot x(t_0)-y(t_0)\cdot x'(t_0)}{x^2(t_0)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}\cdot\theta'(t_0)=\frac{3\cdot e-2e\cdot 1}{e^2}\Rightarrow 5\theta'(t_0)=\frac{e}{e^2}\Leftrightarrow\theta'(t_0)=\frac{1}{5e}\,\mathrm{rad/sec}.$$

**Δ4.** Είναι $0<\alpha<\beta<\gamma\Rightarrow\gamma-\beta>0$ και $\beta-\alpha>0$ έτσι θα δείξουμε ότι:

$$(\gamma-\beta)\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)<(\beta-\alpha)\left(f(\gamma)-f(\beta)\right)\Leftrightarrow\frac{(\gamma-\beta)\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}<\frac{(\beta-\alpha)\left(f(\gamma)-f(\beta)\right)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}.$$

Η $f$ πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[\alpha,\beta],[\beta,\gamma]$ άρα υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta),\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοια ώστε:

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

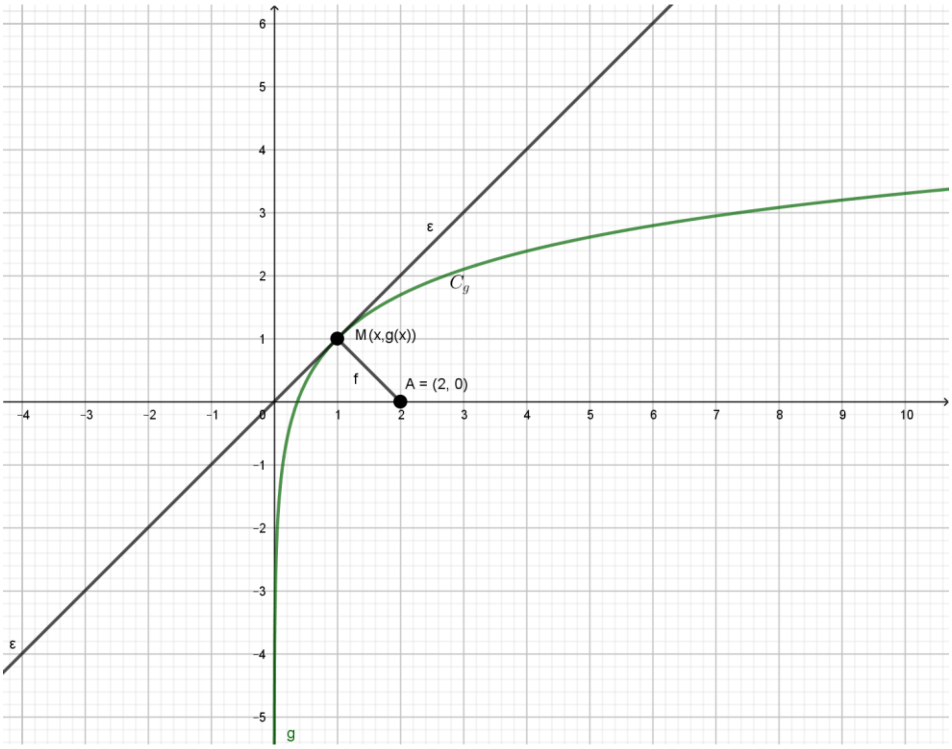
Είναι $f'(x)=\ln x+2, f''(x)=\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Οπότε για $\xi_1<\xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$

**Δ5. α).**

Έχουμε $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{x\ln x+x}{x}=\ln x+1, \quad x>0$

Έστω $M(x,g(x))$ το ζητούμενο σημείο της $C_g$ .




Έχουμε $(MA)^2=(x-2)^2+(g(x))^2=(x-2)^2+(\ln x+1)^2$.

Η απόσταση $MA$ γίνεται ελάχιστη όταν γίνει ελάχιστο το τετράγωνό της, δηλαδή όταν πάρει την ελάχιστη τιμής της η συνάρτηση:

$h(x)=(x-2)^2+(\ln x+1)^2, \ x\in(0,+\infty)$.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει: $h'(x)=2(x-2)+2(\ln x+1)\frac{1}{x}=2\frac{x^2-2x+\ln x+1}{x}$.

Αφού $x>0$ το πρόσημο της $h'(x)$ εξαρτάται από τον αριθμητή.

Θέτω $\varphi(x)=x^2-2x+\ln x+1$ και παρατηρούμε ότι $\varphi(1)=0$.

Είναι $\varphi'(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{x^2 + (x-1)^2}{x} > 0$, άρα η $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Οπότε : $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(1) \overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 1$ και

$\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(1) \overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow} x < 1$.

Το πρόσημο της $h'(x)$, η μονοτονία και τα ακρότατα της $h$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | - | $0$ | + |
| $h(x)$ | $\searrow$ | 0.ε | $\nearrow$ |

Δηλαδή η $h$ παρουσιάζει στο $x = 1$ ελάχιστο το $h(1) = 1$.

Επομένως η ποσότητα $(AM)^2$ και άρα η $(AM)$ γίνεται ελάχιστη όταν $x = 1$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(1,1)$.

**β).** Για κάθε $x > 0$ ισχύει $g'(x) = \frac{1}{x}$, οπότε :

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) στο σημείο $M(1,1)$ είναι: $\lambda_\varepsilon = g'(1) = 1$.
- Ο συντελεστής διεύθυνσης της $AM$ είναι $\lambda_{AM} = \frac{0-1}{2-1} = -1$.

Οπότε $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AM} = -1$ που σημαίνει ότι η εφαπτομένη (ε) είναι κάθετη στην $AM$.

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών.

Το διαγώνισμα επιμελήθηκε ο **Παντερής Ανδρέας**, Μαθηματικός - MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**