

**4^Η ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΤΡΙΤΗ 01 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. α) Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|, x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Μονάδες 4

A2. Να δώσετε τους ορισμούς των εννοιών: **α)** παράγωγος της f στο x_0 **β)** ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 .

Μονάδες 4

A3. Θεωρείστε τους επόμενους τρεις (3) ισχυρισμούς:

α) «Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ »

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής (Μονάδα 0,5), αιτιολογώντας την απάντησή σας (Μονάδες 1).

Μονάδες 1,5

β) «Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ »

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής (Μονάδα 0,5), αιτιολογώντας την απάντησή σας (Μονάδες 1).

Μονάδες 1,5

γ) «Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε η f δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής (Μονάδα 0,5), αιτιολογώντας την απάντησή σας (Μονάδες 1).

Μονάδες 1,5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με **Σ** εάν η πρόταση είναι **σωστή** και με **Λ**, εάν η πρόταση είναι **λανθασμένη**.

α) Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικοί αριθμοί,

τότε η συνάρτηση f είναι υποχρεωτικά παραγωγίσιμη στο x_0 .

β) Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3+x) - f(3)}{x} = 2022$, τότε $f'(3) = 2022$.

γ) Ισχύει $(2^x)' = x \cdot 2^{x-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και c είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει ότι:

$$(c \cdot f(x))' = f'(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

ε) Αν μια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , σ' ένα μόνο σημείο Α, τότε η ευθεία αυτή εφάπτεται της C_f στο σημείο Α.

Μονάδες 2,5

A5. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη **μοναδική** σωστή απάντηση.

α) Αν $f(x) = \sin^3 x^2$ τότε η $f'(x)$ είναι:

A. $-2x \eta \mu^3 x^2$ **B.** $-3 \sin^2 x^2 \cdot \eta \mu x^2$ **Γ.** $-2 \sin^3 x \cdot \eta \mu x$ **Δ.** $-6x \sin^2 x^2 \cdot \eta \mu x^2$

β) Αν $f(x) = e^{2x} - \eta \mu x$ τότε η $f'(x)$ είναι:

A. $e^{2x} - \sigma \nu x$ **B.** $2e^{2x} - \sigma \nu x$ **Γ.** $2e^{2x} + \sigma \nu x$ **Δ.** $-\sigma \nu x$

γ) Το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\epsilon \varphi \left(\frac{\pi}{6} + h \right) - \epsilon \varphi \frac{\pi}{6}}{h}$ είναι ίσο με:

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **Δ.** $\sqrt{3}$

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ) Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(0) = 6$ και $g'(1) = 4$.

Η $(g \circ f)'(0)$ ισούται με:

A. 2

B. 4

Γ. 24

Δ. 6

ε) Αν για τις συναρτήσεις $f(x) = e^{\alpha x}$ και $g(x) = e^{3x}$ ισχύει ότι $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε:

A. $\alpha = 3$

B. $\alpha = \frac{9}{2}$

Γ. $\alpha = \frac{3}{2}$

Δ. $\alpha = \frac{2}{3}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται:

- η **συνεχής** συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + \alpha \cdot \sin x & , x \geq 0 \\ x^2 + x + 3\alpha - 2 & , x < 0 \end{cases}$ και
- η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι **περιττή** και δύο φορές παραγωγίσιμη με $g'(-1) = 3$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ (Μονάδες 2) και να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f (Μονάδες 5).

Μονάδες 7

B2. Να εξετάσετε εάν η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ (Μονάδες 3) και στη συνέχεια εάν είναι (η f') παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ (Μονάδες 3).

Μονάδες 6

B3. Με τη βοήθεια των ερωτημάτων **B1** και **B2**, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' στο διάστημα $[-2, 2\pi]$.

Μονάδες 5

B4. Θεωρούμε επιπλέον, τη συνάρτηση $w(x) = \eta\mu(g(x)) - g(\sin x) + f'(0)$, για την οποία ισχύουν $g(0) = g''(0) = 0$. Να υπολογίσετε τη $g'(1)$ (Μονάδες 3) και στη συνέχεια την $w''(0)$ (Μονάδες 4).

Μονάδες 7

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ ΉΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^4}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(2, -4)$ και εφάπτεται της ευθείας $(\epsilon): y = 4x + 4$ στο σημείο $B(-2, f(-2))$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = \gamma = 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που άγονται από το σημείο $\Gamma(1, 3)$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g .

Μονάδες 6

Γ4. Έστω (ϵ_1) και (ϵ_2) οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στα σημεία $M(-1, g(-1))$ και $N(1, g(1))$, αντίστοιχα. Να σχεδιάσετε τις ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) (Μονάδες 2) και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες (ϵ_1) , (ϵ_2) και ο άξονας x' (Μονάδες 4).

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10 \text{ cm}^2/\text{s}$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $\rho = 85 \text{ cm}$.

(Δίνονται: $E = 4\pi\rho^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi\rho^3$)

Μονάδες 6

Δ2. Υλικό σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{2}{x}, x > 0$. Τη στιγμή t_0 που το σημείο M περνάει από το σημείο $(2, 1)$, η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

α) της τεταγμένης του M τη στιγμή t_0 .

Μονάδες 4

β) της απόστασης του M από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ τη στιγμή t_0 .

Μονάδες 5

γ) της γωνίας που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα ΟΜ με τον άξονα x' τη στιγμή t_0 .

Μονάδες 6

δ) του εμβαδού του ορθογωνίου με διαγώνιο ΟΜ τη στιγμή t_0 .

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΙ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**