

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι  $(x^a)' = ax^{a-1}$ , για κάθε  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ . (7 μονάδες)

**A2.** Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ ; (3 μονάδες)

**A3.** Μια συνάρτηση συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, είναι οπωσδήποτε και παραγωγίσιμη σε αυτό; (1 μονάδα). Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (3 μονάδες)

**A4.** Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  παίρνει πάντοτε μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

β. Μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο  $[a, \beta]$  για την οποία ισχύει ότι  $f(a)f(\beta) > 0$  δεν τέμνει τον  $xx'$  για καμία τιμή του  $x$  στο  $[a, \beta]$ .

γ. Αν  $x_0$  πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει:  $(e^{2x_0})' = 2e^{2x_0}$

δ. Ισχύει ότι:  $(\eta\mu^2 x)' = \eta\mu 2x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ε. Αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$ , με  $k > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$ .

**ΘΕΜΑ Β**

Στην γραφική παράσταση της ευθείας με εξίσωση  $y = -x + 5$ , θεωρούμε τα σταθερά σημεία  $A(2,3)$  και  $\Gamma(0,3)$ , το σημείο τομής  $B$  της ευθείας με τον άξονα  $xx'$  καθώς και ένα σημείο  $M(x, y)$  με  $0 \leq x \leq 5$ . Το σημείο  $M$  μπορεί να κινείται πάνω στα ευθύγραμμα τμήματα  $\Gamma A$  και  $AB$ , ξεκινώντας από το  $\Gamma$ . Δίνεται ακόμα ότι η προβολή  $K$  του  $M$  στον οριζόντιο άξονα, κινείται με ταχύτητα  $2 \mu/s$ .

**B1.** Να δείξετε ότι το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{21}{2} - 3x, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{(5-x)^2}{2}, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

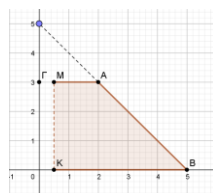
(7 μονάδες)

**B2.** Να ελέγξετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητά στο διάστημα  $[0, 5]$

(5 μονάδες)

**B3.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας τη χρονική στιγμή που το σημείο  $M$  περνάει από το  $A$ .

(6 μονάδες)



**B4.** Καθώς το  $M$  κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , η γωνία  $MOB$  μεταβάλλεται. Να βρείτε το

ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $MOB$  την χρονική στιγμή που το σημείο  $M$  έχει τεταγμένη 1.  
(7 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + 2$  και  $g(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι δεν τέμνονται (2 μονάδες) και να βρείτε την εφαπτόμενη της  $C_f$  που είναι παράλληλη με την ευθεία  $y=x+1$ . (2 μονάδες). Πόσες τέτοιες εφαπτόμενες (παράλληλες με την  $y=x+1$ ) υπάρχουν για την  $g(x)$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας και να βρείτε τον τύπο μιας από αυτές η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (6 μονάδες)

**Γ2.** Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο  $(x_1, g(x_1))$ ,  $x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , ώστε η εφαπτόμενη της  $C_g$  σε αυτό να εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  σε κάποιο σημείο της  $x_0$ . (15 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους:  $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$  και  $g(x) = f(e^x + 1) + f(e^{-x} + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$ . (10 μονάδες)

**Δ2.** Να δείξετε ότι η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε την παράγωγό της. (7 μονάδες)

**Δ3.** Να βρείτε σημείο της γραφικής παράστασης της  $g$  ώστε η εφαπτομένη σε αυτό να σχηματίζει γωνία  $\omega=45^\circ$  με τον άξονα  $xx'$ . (8 μονάδες)