

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α.**

**A<sub>1</sub>.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής

i) Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$

ii) Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$  **(Μονάδες 10)**

**A<sub>2</sub>.** Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μεγίστου στο  $x_0 \in A$  όπου  $A$  το πεδίο ορισμού της  $f$

**(Μονάδες 5)**

**A<sub>3</sub>.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη **σωστό** ( $\Sigma$ ) ή **λάθος** ( $\Lambda$ ) δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0 \in A$  τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$

**β.** Κρίσιμα σημεία του διαγράμματος της  $f$  είναι αυτά στα οποία η παράγωγος της είναι ίση με το μηδέν ή δεν παραγωγίζεται η  $f$

**γ.** Η  $\psi = \lambda x + \beta$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , όταν  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = +\infty$

**δ.** Οι ρητές συναρτήσεις με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες

**ε.**  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  με  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

**(Μονάδες 10)**

## ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση  $f : [0,1] \rightarrow (0, +\infty)$  δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f'(1)=e, f(1)=1 \text{ και } f^2(x)e^x = f''(x)f(x) - (f'(x))^2, \forall x \in [0,1]$$

**B<sub>1</sub>**. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - e^x$  είναι σταθερή στο  $[0,1]$

**(Μονάδες 5)**

**B<sub>2</sub>**. Να δείξετε ότι  $f(x) = e^{e^x - e}, x \in [0,1]$

**(Μονάδες 5)**

**B<sub>3</sub>**. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της  $f$  στο  $[0,1]$

**(Μονάδες 4)**

**B<sub>4</sub>**. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $[0,1]$

**(Μονάδες 5)**

**B<sub>5</sub>**. α) Να εξηγήσετε γιατί υπάρχει η  $f^{-1}$  και να βρείτε τον τύπο της

β) Υπολογίστε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$

**(Μονάδες 6)**

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$2f(x) \geq f(x_1) + f(x_2), x \in \mathbb{R}_+^* \text{ με } x_1 \neq x_2 \neq 1$$

**Γ<sub>1</sub>**) Να δείξετε ότι η  $f$  δεν είναι 1-1

**(Μονάδες 5)**

**Γ<sub>2</sub>**) Να δείξετε ότι η  $f''(x)=0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $\mathbb{R}_+^*$

**(Μονάδες 10)**

**Γ<sub>3</sub>**) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x f''(x) \ln x = -f'(x)$  έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο  $\mathbb{R}_+^*$

**(Μονάδες 5)**

**Γ<sub>4</sub>**) Να βρεθούν τα όρια  $I_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$  και  $I_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

**(Μονάδες 5)**

**ΘΕΜΑ Δ**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = e^{x^2+x}, x \in \mathbb{R}$

$\Delta_1$ ) Ν.δ.ο η εξίσωση  $f'(x)=0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(-1,0)$

**(Μονάδες 3)**

$\Delta_2$ ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του  $C_f$  στο  $(-1, f(-1))$  είναι κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon_1): y=2011+x$

**(Μονάδες 3)**

$\Delta_3$ ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον  $x_1, x_2 \in (-1,1)$  έτσι ώστε  $f''(x_1) + f''(x_2) = 4e^{3/4}$

**(Μονάδες 4)**

$\Delta_4$ ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει ασύμπτωτες σε περιοχή του  $+\infty$ .

**(Μονάδες 7)**

$\Delta_5$ ) **α)** Να δείξετε ότι  $e^{x^2+x} + x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

**β)** Να δείξετε ότι  $e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbb{R}$  και  $f(x) \geq x^2 + x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

**(Μονάδες 8)**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

**Επιμέλεια Θεμάτων**

**Κ. ΖΑΓΚΛΗΣ**