Διαγώνισμα σε Όλη την Ύλη

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΕΝΝΙΑ (9)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_o , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν η f διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπωθεί το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό.

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, αν για κάποιο $x_o\in R$ ισχύει $f''(x_o)=0$, τότε το x_o είναι θέση σημείου καμπής της f.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α ,αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ ,αν είναι ψευδής.(μονάδες 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f , g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$, $g\circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f\circ g=g\circ f$

β. Ισχύει , $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] , τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

δ. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu\geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] , τότε ισχύει :

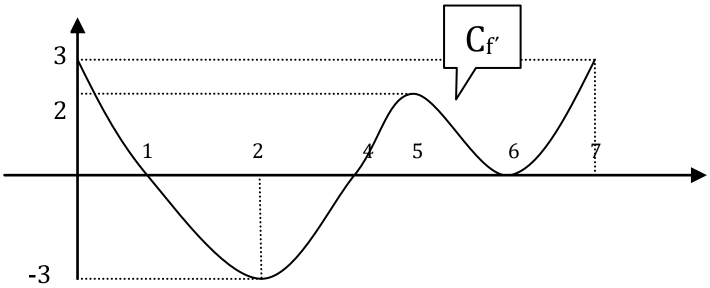
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,7], για την οποία ισχύουν :

- Η γραφική παράσταση της f′ δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- Ισχύουν : $f(0)=f(4)=0$,$f(1)=3$, $f(7)=2f(2)=4$
- Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο [1,6] και
- Δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο [2,5].

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(6)=3$, $f(5)=2$ και ότι υπάρχει $\xi \in (5,6)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=1$. Μονάδες 4

Β2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β3. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής της.

Μονάδες 6

Β4. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 4

Β5. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f′ , τους άξονες xx′, yy′ και την ευθεία x=7.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} ex-e^x+\ln\alpha, & x\le 1 \\ e\ln x - x+\frac{1}{\alpha}, & x>1 \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι α=1 Μονάδες 5

Γ2. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της f. Μονάδες 5

Γ3. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να δειχθεί ότι

$f(x)\leq 1$, για κάθε $x \in R$. Μονάδες 6

Γ4. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 5

Γ5. Να λυθεί η εξίσωση: $f(ef(x))=1+(\ln x-1)^2$ Μονάδες 4

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f , g για τις οποίες ισχύουν :

- $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}, x \in R$
- $f(x)=e^x+\int_0^1 xf(x)dx , x\in R$

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι :

$$f(x)=e^x+2 \ , x \in R$$

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδειχθεί ότι η g είναι κυρτή στο R (μονάδες 3) και

ότι ισχύει $g'(x)+g(x)<g(x+1)$, για κάθε $x \in R$ (μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι η g έχει μοναδικό ακρότατο $x_o \in (-3,2)$, του οποίου να βρεθεί το είδος. Μονάδες 5

Δ4. Να αποδειχθεί ότι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ εφάπτεται και στην C_g. Μονάδες 4

Δ5. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απ την C_g , την κοινή εφαπτομένη $y=x+3$ των C_g , C_f , την ευθεία $x=1$ και τον yy′. Μονάδες 5

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει . Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή .

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ του Διαγωνίσματος

ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΑΛΑΜΑΝΗΣ, μαθηματικός του 3ου ΓΕΛ Γιαννιτσών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

από τον επιμελητή του

I like maths
Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω !

Ιορδάνη Χ. Κοσόγλου, Msc μαθηματικό του ΓΕΛ Εξαπλατάνου

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 145 σχολικού βιβλίου-απόδειξη ιι)

Α2. Σελίδες 128-129 σχολικού βιβλίου

Α3. α) Ψ.

β) Αντιπαράδειγμα η $f(x)= x^4$, $f''(x)=12x^2$ και $f''(0)=0$. όμως η f είναι κυρτή στο R και δεν έχει σημεία καμπής.

Α4. α)Λ β)Λ γ)Σ δ)Λ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει το Θ.Rolle στο [1,6] άρα, $f(1)=f(6)=3$

Δεν ισχύει το Θ.Ε.Τ στο [2,5] , άρα $f(2)=f(5)=2$ γιατί,

από υπόθεση $2f(2)=4$, άρα $f(2)=2$.

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f στο [5,6], άρα υπάρχει $\xi \in (5,6)$, ώστε $f'(\xi)=\frac{f(6)-f(5)}{6-5}=3-2=1$.

Β2. Απ την γραφική παράσταση της f′ έχουμε το πρόσημο της f′, άρα ,

	0		1		4		6		7
f′		+	0	-	0	+	0	+	
f	0	↗	3	↘	0	↗	3	↗	4

- Η f είναι γν. αύξουσα στα [0,1] , [4,7]
- Η f είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα [1,4].
- Το σημείο (1,3) είναι Τ.Μ , το σημείο (4,0) είναι Ο.Ε ,το σημείο (7,4) είναι Ο.Μ και τέλος το (0,0) είναι Ο.Ε της f.

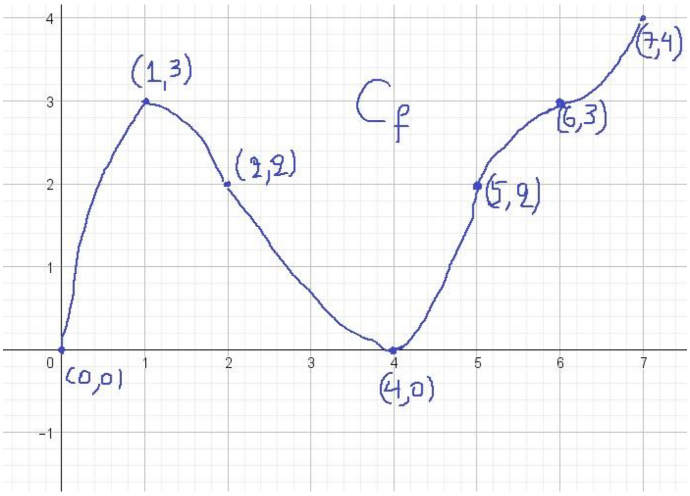
B3. Απ την γραφική παράσταση της f′ έχουμε και τη μονοτονία της f′, άρα ,

	0	2	5	6	7
f′	↘	↗	↘	↗	
f	↷	↺	↷	↺	

Σ.Κ Σ.Κ Σ.Κ

- Η f είναι ΚΥΡΤΗ σε καθένα απ τα διαστήματα [2,5] , [6,7]
- Η f είναι ΚΟΙΛΗ σε καθένα απ τα διαστήματα [0,2] , [5,6].
- Σ.Κ τα σημεία (2, f(2)) , (5, f(5)) , (6, f(6))

B4. Η γραφική παράσταση της f είναι :



B5. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E=\int_0^7 |f'(x)|dx = \int_0^1 f'(x)dx - \int_1^4 f'(x)dx + \int_4^6 f'(x)dx + \int_6^7 f'(x)dx=$$

$$=f(1)-\cancel{f(0)}-(\cancel{f(4)}-f(1))+(\cancel{f(6)}-\cancel{f(4)})+(f(7)-\cancel{f(6)})$$

$$=2f(1)+f(7)=6+4=10 \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής άρα $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-1+\frac{1}{\alpha}$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\ln\alpha=f(1)$.

Πρέπει να ισχύει : $\ln\alpha=-1+\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow t(\alpha)=t(1)$ (*), όπου $t(x)=\ln x-\frac{1}{x}$, $x>0$

Η t είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ γιατί $t'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$, $x>0$ άρα 1-1.

Συνεπώς από (*) προκύπτει α=1 .

Γ2. Κρίσιμα είναι τα εσωτερικά σημεία στα οποία η παράγωγος είναι 0 ή δεν υπάρχει.

$$f(x)=\begin{cases} ex-e^x, x\leq 1 \\ elnx-x+1, x>1 \end{cases}$$

Το σημείο (1,0) είναι κρίσιμο γιατί η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, μιας και

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{elnx-x+1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{\triangleq}}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{e}{x}-1}{1}=e-1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ex-e^x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{\triangleq}}\lim_{x\to 1^+}\frac{e-e^x}{1}=0$$

Επίσης, η παράγωγος της f είναι :

$$f'(x)=\begin{cases} e-e^x, x<1 \\ e\frac{1}{x}-1, x>1 \end{cases}$$

- για κάθε x<1 είναι f′(x)>0
- για κάθε x>1 είναι f′(x)=0 $\Longrightarrow\ x=e$

Συνεπώς το σημείο (e,1) είναι και αυτό κρίσιμο σημείο της f.

Γ3. Ο πίνακας προσήμου της f' είναι :

	$-\infty$		1		e		$+\infty$
f'		+	‖	+	0	-	
f		↗		↗		↘	

- Η f είναι γν.αύξουσα στο (-∞,e]και γν.φθίνουσα στο [e,+∞)
- f((-∞,e])=$(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(e)]=(-\infty,1]$
- f([e,+∞))=$(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(e)]=(-\infty,1]$

Γιατί, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(elnx-x+1)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{elnx}{x}-1+\frac{1}{x}\right)\right]=(+\infty)(0-1+0)=-\infty$$

Άρα f(x)≤1 για κάθε x∈ R

Γ4. Είναι συνεχής στο R άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητώ πλάγιες στο -∞

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{\substack{\frac{\infty}{\infty}\\ DLH}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{e-e^x}{1}=e$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ex)=\lim_{x\to-\infty}(ex-e^x-ex)=0$$

Άρα η ευθεία y=ex είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο -∞.

Αναζητώ πλάγιες στο +∞

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{\substack{\frac{\infty}{\infty}\\ DLH}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e}{x}-1}{1}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}(elnx-x+1+x)=+\infty$$

Άρα δεν έχει πλάγιες στο +∞.

Επειδή,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(elnx-x+1)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{elnx}{x}-1+\frac{1}{x}\right)\right]=(+\infty)(0-1+0)=-\infty$$

Δεν έχει οριζόντιες στο +∞.

Γ5. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε x>0

Είναι f(x)≤1 , x ∈ R , το «=» ισχύει για x=e,

άρα f(ef(x))≤1 ,x ∈ R , το «=» ισχύει για e f(x)=e⟺f(x)=1⟺ $x=e$

Επίσης $1+(lnx-1)^2\geq 1$, για κάθε $x>0$

Ισχύει, $f(ef(x))=1+(lnx-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(ef(x))=1 \\ 1+(lnx-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=e \\ x=e \end{cases} \Leftrightarrow x=e$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Είναι $\int_0^1 xf(x)dx = c$

Άρα $f(x)= e^x + c$, $x\in R$, και

$$\int_0^1 x(e^x + c)dx = c \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 cxdx = c \Leftrightarrow$$

$$[xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx + c[\frac{x^2}{2}]_0^1 = c$$

$$\text{e-(e-1)+c}\frac{1}{2} = c \Leftrightarrow 2 + c = 2c \Leftrightarrow 2 = c$$

Δ2. Είναι $g'(x)=e^x - \frac{3x^2}{6} - x$, $x \in R$, $g''(x)=e^x - x - 1$, $x \in R$

Επειδή $e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow g''(x) > 0$ για κάθε $x\neq0$ και η $g(x)$ συνεχής, άρα η g είναι κυρτή στο R και η g' είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ για την g στο [x,x+1] άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi\in (x, x + 1)$ ώστε $g'(\xi)=\frac{g(x+1)-g(x)}{x+1-x} = g(x + 1) - g(x)$

Και ,

$$x<\xi\Leftrightarrow$$

$$g'(x)<g'(\xi)\overset{g'\nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$g'(x) < g(x + 1) - g(x)$$

$$g'(x)+g(x)<g(x+1)$$

Δ3. Είναι,

x	-∞	x_0	+∞
g''	+		+
g'	- ↗	0	↗ +
g	↘		↗
		Ο.Ε	

$$\lim_{x\to-\infty} g'(x) = -\infty \ , \lim_{x\to+\infty} g'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in R$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$, γιατί αυτό ανήκει στο (-3,-2) ;

- Η g' είναι συνεχής στο [-3,2] μιας και είναιπαραγωγίσιμη
- $g'(-3)= e^{-3}-\frac{9}{2}+3=\frac{2-9e^3+6e^3}{2e^3}=\frac{2-3e^3}{2e^3}<0$, γιατί $e^3>\frac{2}{3}$
- $g'(-2)=e^{-2}-2+2=e^{-2}>0$

Άρα από Θ. Μπολτζάνο προκύπτει μοναδικό $x_o \in (-3,-2)$ και είναι Ο.Ε της g.

Δ4. Η εφαπτομένη της C_f στο (0,3) είναι : $y-3=1(x-0) \Leftrightarrow y=x+3$

Για να εφάπτεται στην g θα πρέπει να ισχύουν $\begin{cases} g(x_1)=x_1+3 \ \ (1) \\ g'(x_1)=1 \ \ (2) \end{cases}$, όπου $(x_1,g(x_1))$ το σημείο επαφής.

Θυμίζουμε ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση άρα 1-1.

Η (2) ικανοποιείται μόνο για $x_1=0$,το οποίο ικανοποιεί και την (1).

Άρα η y=x+3 εφάπτεται στην γραφική παράσταση της g στο ίδιο σημείο (0,3).

Δ5. Το ζητούμενο εμβαδόν χωρίου που περικλείεται απ την C_g , την κοινή εφαπτομένη y=x+3 των C_g , C_f και την ευθεία x=1,είναι το

$$E(\Omega)=\int_0^1 (g(x)-x-3)dx \text{ , γιατί}$$

g(x)≥x+3 ως κυρτή και η y=x+3 εφαπτομένη της στο σημείο (0,3).

Άρα $E(\Omega)=\int_0^1\left(e^x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1\right)dx=\left[e^x-\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1=e-\frac{65}{24}\sim 0.01$