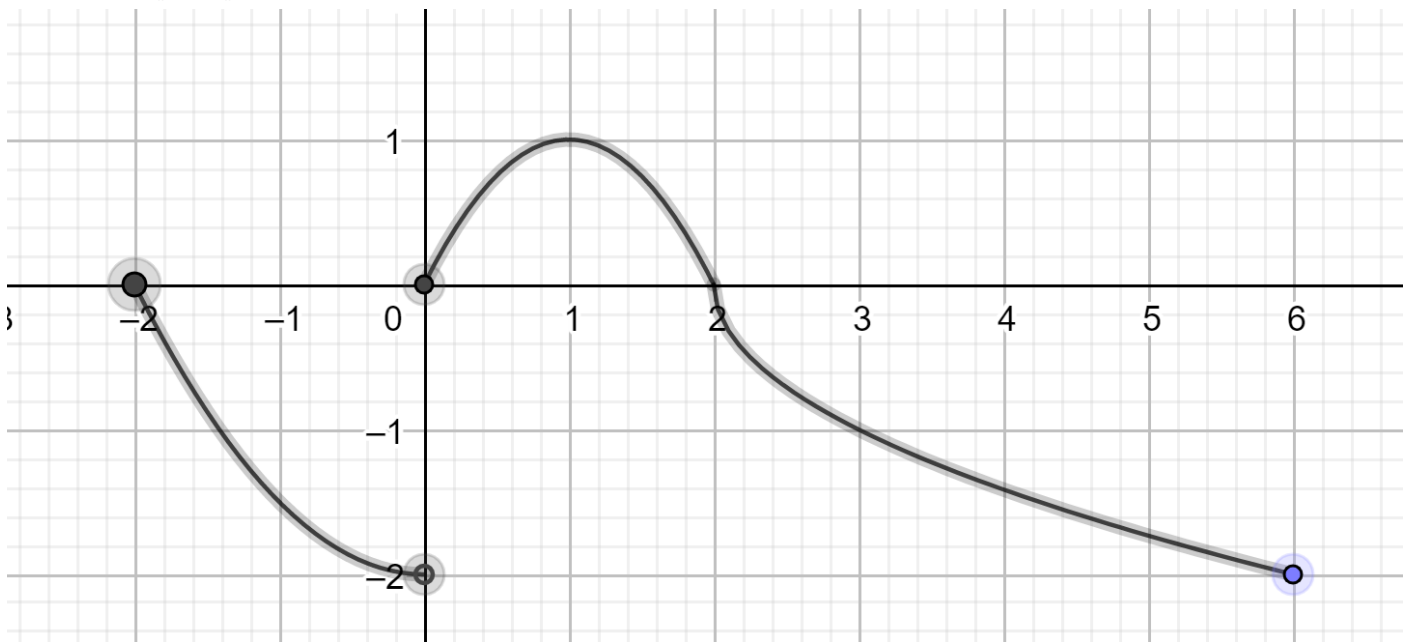


**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο  $[α, β]$  ; **(3 μονάδες)**
- A2.** Να αποδείξετε ότι μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο  $[α, β]$  για την οποία υπάρχει σημείο  $x_0$  στο  $(α, β)$  ώστε  $f'(x) < 0$  στο  $(α, x_0)$  και  $f'(x) > 0$  στο  $(x_0, β)$ , έχει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0$ . **(8 μονάδες)**
- A3.** Δίνεται ο ισχυρισμός: «Μια συνάρτηση συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , που έχει σημείο καμπής στο  $x_0$ , μπορεί να εμφανίζει και τοπικό ακρότατο στο ίδιο σημείο». Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» τον παραπάνω ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(1+3 μονάδες)**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς ως «Σωστό» ή «Λάθος».
- Μια συνάρτηση συνεχής και γνήσια αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , δεν έχει ακρότατα.
  - Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
  - Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς σε ένα διάστημα συνάρτησης  $f$  είναι επίσης διάστημα.
  - Το Θεώρημα Μέσης Τιμής μπορεί να εφαρμοστεί για τη συνάρτηση  $f(x) = |x - 2|$  στο διάστημα  $[0, 3]$ .
  - Μια συνεχής συνάρτηση η οποία διατηρεί πρόσημο, δεν μπορεί να έχει σημείο καμπής. **(10 μονάδες)**

**ΘΕΜΑ Β**

Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου  $f'$  μιας συνάρτησης  $f$ , με πεδίο ορισμού το  $[-2, 6]$ , στο οποίο η  $f$  είναι συνεχής.



- B1.** Να βρείτε τη μονοτονία και τις θέσεις των ακροτάτων (αν υπάρχουν) της συνάρτησης  $f$ . **(6 μονάδες)**
- B2.** Να βρείτε την κυρτότητα της  $f$  καθώς και τις θέσεις των σημείων καμπής - αν υπάρχουν - της συνάρτησης  $f$ . Θεωρήστε γνωστό ότι δεν ορίζεται εφαπτομένη της συνάρτησης  $f$  στη θέση  $x=0$ . **(6 μονάδες)**
- B3.** Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο στο διάστημα  $(-2, 0)$ , στο οποίο η εφαπτομένη της συνάρτησης  $f'$  να είναι παράλληλη της  $y = -\frac{1}{2}x$ . **(6 μονάδες).**

**B4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της  $f'(x)$ , του  $\chi\chi'$ , του  $\psi'\psi$  και της ευθείας με εξίσωση  $x=6$  αν, επιπλέον, γνωρίζετε ότι  $f(2) = 1$ ,  $f(0) = -\frac{1}{3}$ ,  $f(6) = -\frac{13}{3}$  (7 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{x^3}{3a^3}$ ,  $x > 0$  και  $a > 0$ ,  $g(x) = \ln x$ ,  $x > 0$

**Γ1.** Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση  $\Delta(x) = f(x) - g(x)$ ,  $x > 0$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (6 μονάδες)

**Γ2.** Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων των συναρτήσεων  $f, g$  για τις διάφορες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$ . (4 μονάδες)

**Γ3.** Στην περίπτωση όπου οι  $C_f, C_g$  δεν έχουν κοινά σημεία δείξτε ότι στο σημείο όπου η κατακόρυφη απόσταση των  $C_f, C_g$  παρουσιάζει ακρότατο, οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των  $f, g$  είναι μεταξύ τους παράλληλες. (4 μονάδες)

**Γ4.** Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα την  $\gamma = \Delta(x)$  (3 μονάδες) και να αποδείξετε ότι :

i. για κάθε  $x_1, x_2$  με  $0 < x_1 < x_2$  ισχύει ότι :

$$2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + g(x_1) + g(x_2) < 2g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f(x_1) + f(x_2) \quad (4 \text{ μονάδες})$$

ii.  $\int_2^3 \Delta(x) dx < \frac{1}{3} \cdot \int_2^5 \Delta(x) dx$  (4 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία γνωρίζουμε ότι  $f(e) = 0$  και

$$xf'(x) - f(x) = -xe^{\frac{f(x)}{x}}, \text{ για κάθε } x > 1.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = -x \ln(\ln x)$ . (5 μονάδες)

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της και να βρείτε την εφαπτομένη της στο  $x_0 = e$ . (5+2 μονάδες)

**Δ3.** Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της και να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $a(\ln x)^x = 1$ ,  $x > 1$ , έχει μία ακριβώς λύση για κάθε  $a > 0$ . (6+2 μονάδες)

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι:  $\int_2^e f(x) dx > \frac{(e-2)^2}{2}$  (5 μονάδες)