

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**15<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ**

**[Κεφάλαια 1, 2, 3 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]**

**ΘΕΜΑ Α**

1. Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

β. κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**

2. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

3. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της  $f$ ;

**Μονάδες 3**

4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό**, αν είναι σωστή ή με **Λάθος** αν είναι λανθασμένη:

α) Εάν  $\alpha < \beta$ , τότε το  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

β)  $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_2}^{u_1} f(u)du$ , όπου  $f$ ,  $g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις,  $u = g(x)$ ,  $du = g'(x)dx$  και  $u_1 = g(\alpha)$ ,  $u_2 = g(\beta)$ .

γ) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και  $f(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , στον άξονα  $x'x$  και τις κατακόρυφες ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$ , ισούται με  $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$ .

δ) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .

ε) Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο η  $f$  είναι συνεχής.

Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

Μονάδες 10

### ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f(e) = 0$
- $f'(x) = \frac{f(x)}{x} - e^{\frac{f(x)}{x}}$ , για κάθε  $x > 1$ .

B1. Να δείξετε ότι ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = -x \cdot \ln(\ln x)$ .

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε τη μονοτονία της  $f$  και το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

B3. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $(\ln x)^x = \frac{1}{m}$ ,  $x \in (1, +\infty)$  έχει ακριβώς μία λύση για κάθε  $m > 0$ .

Μονάδες 5

B4. Να λύσετε την ανίσωση:  $f(x^2 + 2) - f(3x) < 3x - x^2 - 2$

Μονάδες 7

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$g'(x) = \frac{1}{3g^2(x) + \varepsilon} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ όπου } \varepsilon \text{ μία σταθερά στο σύνολο } \mathbb{R}.$$

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $g$ , στο σημείο της  $A(0, g(0))$  έχει εξίσωση:

$$x - 2018y + 2018 = 0$$

α) Να βρείτε τον αριθμό  $\varepsilon$ .

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι  $g^3(x) + 2015 \cdot g(x) = x + 2016$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 5

γ) Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $g$  είναι το  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  αντιστρέφεται και έχει τύπο  $g^{-1}(x) = x^3 + 2015x - 2016$ .

Μονάδες 4

δ) Να βρείτε τα σημεία καμπής της  $C_g$ .

Μονάδες 6

ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{g^{-1}(x)}{x \cdot g(x) \cdot (g^2(x) + 2015)}$$

Μονάδες 6

#### ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{\ln x}{\alpha x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  για την οποία ισχύει:

$$f(x) \leq x - 1 \text{ για κάθε } x > 0$$

Δ1. Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

Μονάδες 4

Δ2. Για  $\alpha = 1$ .

(α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

(β) Να δείξετε ότι  $f(x) \leq \frac{1}{e}$  για κάθε  $x > 0$ .

Μονάδες 3

(γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\ln^2 x + 2\lambda x = 0$ , έχει το πολύ μία ρίζα στο  $(0, +\infty)$ , για κάθε  $\lambda < -\frac{1}{e}$ .

Μονάδες 4

(δ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (1, e)$  τέτοιο ώστε  $1 - \ln \xi = \frac{\xi^2}{e^2 - e}$ .

Μονάδες 5

(ε) Αν η αντίστροφη της  $f$  στο  $(0, e]$  είναι συνεχής να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_{f^{-1}}$ , τους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$  και την ευθεία  $x = \frac{1}{e}$ .

**Μονάδες 5**

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Τα θέματα Β & Δ επιμελήθηκε ο **Παντελής Ανδρέας**, Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.