

Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis 2021 - 2022



Αντώνης Βαλέργας
Στέλιος Μιχαήλογλου
Δημήτρης Πατσιμάς
Νίκος Σαμπάνης

Αποστόλης Κακαβάς
Άγγελος Μπλιάς
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Βαγγέλης Τόλης

Νίκος Τούντας

6ο Διαγώνισμα

6 – 4 -2022

Θέμα Α

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$,

να αποδείξετε ότι: $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$.

μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν για μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq m$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει ελάχιστο το m ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} τότε η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

β) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}^* .

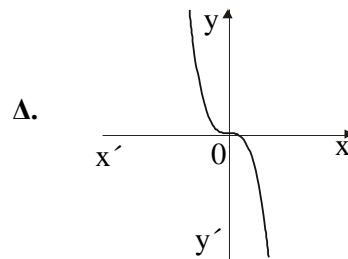
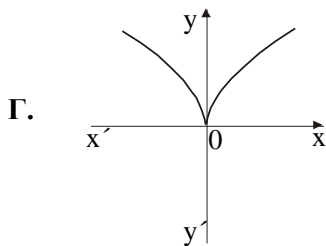
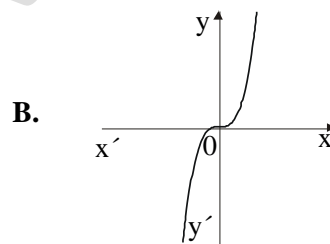
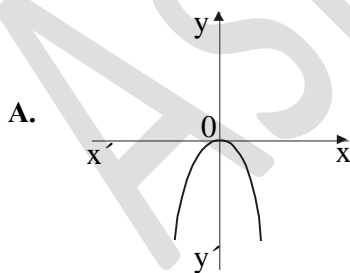
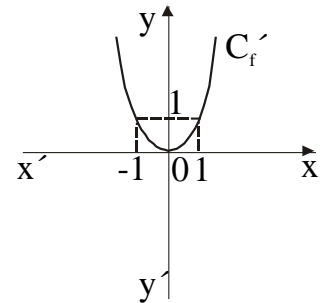
γ) Αν η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

μονάδες 6

A5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στη παρακάτω πρόταση:

Η γραφική παράσταση C_f της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι:



μονάδες 4

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x-2}$ και $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να δείξετε ότι: $h(x) = (f \circ g)(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-2}$, $x \in [0,4) \cup (4,+\infty)$.

μονάδες 5

B2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης h σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

μονάδες 4

B3. Να εξετάσετε αν για κάθε $x_1, x_2 \in [0,4) \cup (4,9]$ με $x_1 < x_2$ είναι $h(x_1) > h(x_2)$.

μονάδες 6

B4. Αφού αποδείξετε ότι h αντιστρέφεται, να βρείτε την αντίστροφη, τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της h με την ευθεία $y = x$.

μονάδες 6

B5. Αν $h^{-1}(x) = \frac{4x^2}{(x-1)^2}$, $x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} h^{-1}(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - \sqrt{h^{-1}(x)}}.$$

μονάδες 2+2

Θέμα Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f'(x) = f(x) + e^x \sin x$ και

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}. \text{ Θεωρούμε επίσης και τη συνάρτηση } h(x) = x \sin x, x \in [0, \pi].$$

Να αποδείξετε ότι:

Γ1. η συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^x \eta \mu x$ μπορεί να πάρει τη μορφή $g(x) = ce^x$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

μονάδες 4

Γ2. $f(x) = e^x \eta \mu x$ και στη συνέχεια να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

μονάδες 7

Γ3. οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h έχουν κοινή εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων την οποία και να βρείτε.

μονάδες 3

Γ4. $f(x) - h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

μονάδες 5

Γ5. η f αντιστρέφεται στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και να βρείτε το σύνολο στο οποίο ορίζεται f^{-1} . Αν επιπλέον

γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, e^{\frac{\pi}{2}}\right]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in \left(0, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

τέτοιο, ώστε $3(f^{-1})'(\theta) < \pi e^{\frac{\pi}{3}}$.

μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = -1$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$f(x)f'(x) - 2xf(x) - x^2f'(x) + 2x^3 = e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Δίνεται επιπλέον και η συνάρτηση}$$

$$h(x) = e^x + x^2 + x - e^{x+1}, x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - e^x, x \in \mathbb{R}$.

μονάδες 3

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε ,

αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{\ln|x|}{f(x) - f(\rho)}$.

μονάδες 5

Δ3. Για κάθε $x > 1$ να αποδείξετε ότι :

α) $f(x) + ex < 2x - 1$

β) $(x+1)f(x) + ex > f(x^2) + x$

μονάδες 3+4

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x) - x^2) = (x+3)^2 - \frac{1}{e^{x+3}}$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο \mathbb{R} .

μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που ορίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)$ με τον άξονες x, y και την ευθεία $x=1$.

μονάδες 5

Ευχόμαστε Επιτυχία!