Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

2021 - 2022

Αντώνης Βαλέργας
Αποστόλης Κακαβάς
Στέλιος Μιχαήλογλου
Άγγελος Μπλιάς
Δημήτρης Πατσιμάς
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Νίκος Σαμπάνης
Βαγγέλης Τόλης
Νίκος Τούντας

6ο Διαγώνισμα

6-4-2022

Θέμα Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν για μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq m$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει ελάχιστο το m».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ τότε η gof είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$.

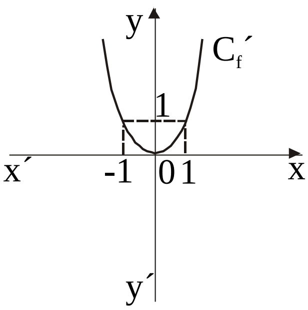
γ) Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

μονάδες 6

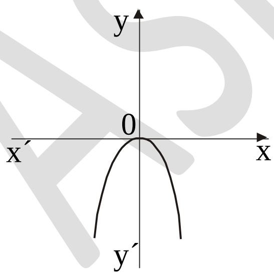
Α5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στη παρακάτω πρόταση:

Η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

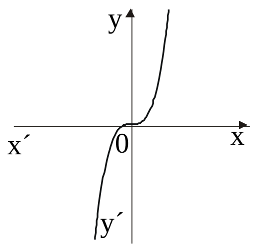
Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι:



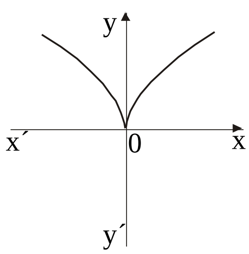
Α.



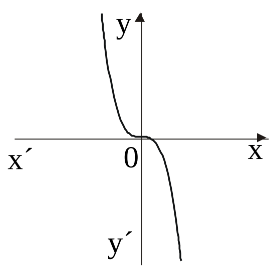
Β.



Γ.



Δ.



μονάδες 4

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x}{x-2}$ και $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να δείξετε ότι: $h(x)=(f\circ g)(x)=1+\frac{2}{\sqrt{x}-2}$, $x\in[0,4)\cup(4,+\infty)$.

μονάδες 5

Β2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης h σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

μονάδες 4

Β3. Να εξετάσετε αν για κάθε $x_1, x_2 \in [0,4)\cup(4,9]$ με $x_1<x_2$ είναι $h(x_1)>h(x_2)$.

μονάδες 6

Β4. Αφού αποδείξετε ότι h αντιστρέφεται, να βρείτε την αντίστροφη , τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της h με την ευθεία $y=x$.

μονάδες 6

Β5.Αν $h^{-1}(x)=\frac{4x^2}{(x-1)^2}$,$x\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}h^{-1}(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-\sqrt{h^{-1}(x)}}$.

μονάδες 2+2

Θέμα Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f'(x)=f(x)+e^x$συνx και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$. Θεωρούμε επίσης και τη συνάρτηση $h(x)=x$συνx, $x\in[0,\pi]$.

Να αποδείξετε ότι:

Γ1. η συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^x$ημx μπορεί να πάρει τη μορφή $g(x)=ce^x$, όπου $c\in\mathbb{R}$.

μονάδες 4

Γ2. $f(x)=e^x$ημx και στη συνέχεια να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα , την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

μονάδες 7

Γ3. οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h έχουν κοινή εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων την οποία και να βρείτε.

μονάδες 3

Γ4. $f(x)-h(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

μονάδες 5

Γ5. η f αντιστρέφεται στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και να βρείτε το σύνολο στο οποίο ορίζεται η f^{-1} . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,e^{\frac{\pi}{2}}\right]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta\in\left(0,e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ τέτοιο, ώστε $3\left(f^{-1}\right)'(\theta)<\pi e^{-\frac{\pi}{3}}$.

μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=-1$ για την οποία ισχύει η σχέση $f(x)f'(x)-2xf(x)-x^2f'(x)+2x^3=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δίνεται επιπλέον και η συνάρτηση $h(x)=e^x+x^2+x-e^{x+1}, x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2-e^x, x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 3

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in (-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε , αν υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to\rho}\dfrac{\ln|x|}{f(x)-f(\rho)}$.

μονάδες 5

Δ3. Για κάθε $x>1$να αποδείξετε ότι :

α) $f(x)+ex<2x-1$

β) $(x+1)f(x)+ex>f(x^2)+x$

μονάδες 3+4

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x)-x^2\right)=(x+3)^2-\dfrac{1}{e^{x+3}}$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που ορίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)$ με τον άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

μονάδες 5

Ευχόμαστε Επιτυχία!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια

παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x)=F(x)+c$. (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$ οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

Α2. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

Α3. α) Ψευδής

β) Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$ παρατηρούμε ότι $f(x)\geq -2$ και γενικά από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό στη θέση του – 2, όμως το -2 δεν είναι ελάχιστο της f γιατί δεν υπάρχει σημείο της C_f με αυτή την τεταγμένη (δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=m$)

2ο αντιπαράδειγμα: Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2+(x-1)^2$ ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όμως η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow x^2+(x-1)^2=0$ είναι αδύνατη.

Α4. α) Λ β) Λ γ) Σ

Α5. Β

Θέμα Β

Β1. $A_f=\mathbb{R}-\{2\}$ και $A_g=[0,+\infty)$

$A_h=A=\left\{x\in A_g\, /\, g(x)\in A_f\right\}=\left\{x\geq 0: \sqrt{x}\neq 2\right\}=[0,4)\cup(4,+\infty)$ και

$$h(x)=(f\circ g)(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}-2+2}{\sqrt{x}-2}=1+\frac{2}{\sqrt{x}-2},\ x\in[0,4)\cup(4,+\infty).$$

Β2. Α τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2\in[0,4)$ με $x_1<x_2\Rightarrow\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Rightarrow\sqrt{x_1}-2<\sqrt{x_2}-2$

$\overset{\text{ομόσημοι}}{\Rightarrow}\dfrac{1}{\sqrt{x_1}-2}>\dfrac{1}{\sqrt{x_2}-2}\Rightarrow\dfrac{2}{\sqrt{x_1}-2}>\dfrac{2}{\sqrt{x_2}-2}\Rightarrow 1+\dfrac{2}{\sqrt{x_1}-2}>1+\dfrac{2}{\sqrt{x_2}-2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,4) .

Για κάθε $x_1,x_2\in(4,+\infty)$ με $x_1<x_2\Rightarrow\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Rightarrow\sqrt{x_1}-2<\sqrt{x_2}-2\overset{\text{ομόσημοι}}{\Rightarrow}\dfrac{1}{\sqrt{x_1}-2}>\dfrac{1}{\sqrt{x_2}-2}$

$\Rightarrow\dfrac{2}{\sqrt{x_1}-2}>\dfrac{2}{\sqrt{x_2}-2}\Rightarrow 1+\dfrac{2}{\sqrt{x_1}-2}>1+\dfrac{2}{\sqrt{x_2}-2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

(4,+ ∞).

Β τρόπος: $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)^2}<0$ σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της, οπότε η f θα είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

Β3. Είναι $h(1)=1+\dfrac{2}{1-2}=-1,\ h(9)=1+\dfrac{2}{3-2}=3$.

Είναι 1<9 και $h(1)=-1<h(9)=3$ άρα δεν ισχύει ότι για κάθε $x_1,x_2\in[0,4)\cup(4,9]$ με $x_1<x_2$ είναι $h(x_1)>h(x_2)$.

Β4. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται:

1ος τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2\in[0,4)\cup(4,+\infty)$ με $h(x_1)=h(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{2}{\sqrt{x_1}-2}=\dfrac{2}{\sqrt{x_2}-2}\Leftrightarrow$

$\sqrt{x_1}-2=\sqrt{x_2}-2\Leftrightarrow\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η h είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται.

2ος τρόπος: Είναι $\lim\limits_{x\to4^-}h(x)=\lim\limits_{x\to4^-}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}\right)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to4^-}\sqrt{x}-2=0$ και $\sqrt{x}-2<0$ για $x\in(0,4)$,

$\lim\limits_{x\to4^+}h(x)=\lim\limits_{x\to4^+}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to4^-}\sqrt{x}-2=0$ και $\sqrt{x}-2>0$ για $x\in(4,+\infty)$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}\right)\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{\sqrt{x}-2=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{u}\right)=1$.

Η h είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από αυτά άρα $h([0,4))=(\lim\limits_{x\to4^-}h(x),h(0)]=(-\infty,0]$ και

$h((4,+\infty))=(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),\lim\limits_{x\to4^+}h(x))=(1,+\infty)$.

Είναι $h\big([0,4)\big)\cap h\big((4,+\infty)\big)=\varnothing$ άρα η h είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται.

Τώρα θα βρούμε τον τύπο της αντίστροφης:

1ος τρόπος: Η h έχει σύνολο τιμών το $h(A)=(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$ άρα

Για $x\in[0,4)\cup(4,+\infty)$ και $y\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$ έχουμε $y=h(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\Leftrightarrow y\sqrt{x}-2y=\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow y\sqrt{x}-\sqrt{x}=2y\Leftrightarrow(y-1)\sqrt{x}=2y\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{2y}{y-1}\Leftrightarrow x=\dfrac{4y^2}{(y-1)^2}$

Άρα η $h^{-1}(x)=\dfrac{4x^2}{(x-1)^2}$,$x\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$.

2ος τρόπος: Για $x\in[0,4)\cup(4,+\infty)$ έχουμε $y=h(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\Leftrightarrow y\sqrt{x}-2y=\sqrt{x}\Leftrightarrow y\sqrt{x}-\sqrt{x}=2y$

$\Leftrightarrow(y-1)\sqrt{x}=2y\overset{y\neq1}{\Leftrightarrow}\sqrt{x}=\dfrac{2y}{y-1}\Leftrightarrow x=\dfrac{4y^2}{(y-1)^2}$

Είναι $\sqrt{x}\geq0\Leftrightarrow\dfrac{2y}{y-1}\geq0\overset{y\neq1}{\Leftrightarrow}2y(y-1)\geq0\overset{y\neq1}{\Leftrightarrow}y\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$ (1) , $x\geq0\Leftrightarrow\dfrac{4y^2}{(y-1)^2}\geq0$ ισχύει (2) και

$x\neq4\Leftrightarrow\dfrac{4y^2}{(y-1)^2}\neq4\Leftrightarrow4y^2\neq4(y-1)^2\Leftrightarrow\cancel{y^2}\neq\cancel{y^2}-2y+1\Leftrightarrow y\neq\dfrac{1}{2}$ (3)

Άρα από τις (1),(2),(3) είναι $y\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$. Άρα η $h^{-1}(x)=\dfrac{4x^2}{(x-1)^2}, x\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$.

Για $x\in[0,4)\cup(4,+\infty)$: $h(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=x \Leftrightarrow \sqrt{x}=x(\sqrt{x}-2) \Leftrightarrow 0=x(\sqrt{x}-2)-\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 0=x\sqrt{x}-2x-\sqrt{x} \Leftrightarrow 0=\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow 0=\sqrt{x}$ ή $x-2\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $\sqrt{x}=1\pm\sqrt{2}$ οπότε δεκτή η $\sqrt{x}=1+\sqrt{2}$ οπότε $x=3+2\sqrt{2}$ άρα έχουν δυο κοινά σημεία τα (0,0) και $(3+2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$

Β5. $\lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}4=4$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-\sqrt{h^{-1}(x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-\sqrt{\dfrac{4x^2}{(x-1)^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-\dfrac{2x}{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}}=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}\right)=+\infty$

Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^x ημx$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $g'(x)=f'(x)-e^x ημx-e^x συνx \Leftrightarrow g'(x)=f(x)-e^x ημx \Leftrightarrow g'(x)=g(x)$.

Οπότε από γνωστή εφαρμογή θα είναι $g(x)=ce^x$.

Γ2. Είναι $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}=0 \Leftrightarrow ce^{\frac{\pi}{2}}=0 \Leftrightarrow c=0$.

Άρα $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-e^x ημx=0 \Leftrightarrow f(x)=e^x ημx$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f'(x)=e^x ημx+e^x συνx=e^x(ημx+συνx)$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow ημx+συνx=0 \Leftrightarrow ημx=-συνx$ (1).

Αν $συνx=0$ τότε από (1) θα είναι και $ημx=0$ (άτοπο). Συνεπώς, $συνx\neq 0$ οπότε από την (1) έχουμε $\dfrac{ημx}{συνx}=-1 \Leftrightarrow εφx=-εφ\dfrac{\pi}{4}=εφ\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x=κ\pi-\dfrac{\pi}{4}, κ\in\mathbb{Z}$ (1)

Επειδή $0\le x\le\pi$ τότε $0\le κ\pi-\dfrac{\pi}{4}\le\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}\le κ\pi\le\dfrac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\le κ\le\dfrac{5}{4} \overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} κ=1$, άρα από (1) $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Αν $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ τότε επιλέγουμε $x_1=\dfrac{\pi}{2}$ και $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$ οπότε $f'(x)>0$ στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$. Αν $x\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$ τότε επιλέγουμε $x_2=\pi$ και $f'(\pi)=-e^{\pi}<0$ οπότε $f'(x)<0$ στο $\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$ συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$. Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=\dfrac{3\pi}{4}$ το $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ και ελάχιστο για $x=0$ και $x=\pi$ το $f(0)=f(\pi)=0$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f''(x)=e^x(ημx+συνx)+e^x(συνx-ημx)=2e^x συνx$.

Είναι $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2e^x συνx>0 \Leftrightarrow συνx>0 \Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Οπότε η f είναι κυρτή στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Η C_f έχει σημείο καμπής το $A\left(\frac{\pi}{2},e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

Γ3. Είναι $f(x)=e^x ημx$ και $h(x)=xσυνx$ με $f'(x)=e^x(ημx+συνx)$ και $h'(x)=συνx-xημx$. Οπότε $f(0)=h(0)=0$ και $f'(0)=h'(0)=1$. Άρα οι C_f και C_h έχουν στο κοινό τους σημείο $O(0,0)$ κοινή εφαπτομένη την $y-0=1(x-0)\Leftrightarrow y=x$

Γ4. Από το ερώτημα Γ2 γνωρίζουμε ότι η f είναι κυρτή στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, επομένως η C_f θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο , συνεπώς θα είναι $f(x)\ge x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Επίσης , η $h'(x)=συνx-xημx$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $h''(x)=-2ημx-xσυνx<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα η h είναι κοίλη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και η C_h θα βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο. Θα είναι $h(x)\le x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Συμπεραίνουμε ότι $f(x)\ge x\ge h(x)\Leftrightarrow f(x)\ge h(x)$

$f(x)-h(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Γ5. Επειδή $f'(x)=e^x(ημx+συνx)>0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα και 1-1 στο διάστημα αυτό. Επομένως η f αντιστρέφεται . Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με σύνολο τιμών

$f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f(0),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\left[0,e^{\frac{\pi}{2}}\right]$.

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ορίζεται στο $\left[0,e^{\frac{\pi}{2}}\right]$.

Αφού η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,e^{\frac{\pi}{2}}\right]$, τότε θα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.. Συνεπώς θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta\in\left(0,e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ τέτοιο, ώστε

$(f^{-1})'(\theta)=\dfrac{f^{-1}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)-f^{-1}(0)}{e^{\frac{\pi}{2}}}=\dfrac{\frac{\pi}{2}-0}{e^{\frac{\pi}{2}}}=\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}<\frac{\pi}{3}e^{-\frac{\pi}{3}}$

Θεωρούμε την $\varphi(x)=xe^{-x}$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=e^{-x}(1-x)$. Είναι $\varphi'(x)>0\Leftrightarrow e^{-x}(1-x)>0\Leftrightarrow 1-x>0\Leftrightarrow x<1$. Οπότε για

$x>1$ είναι $\varphi'(x)<0$ άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Είναι $1<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)>\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}e^{-\frac{\pi}{3}}>\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$.Συνεπώς $\left(f^{-1}\right)'(\theta)<\frac{\pi}{3}e^{-\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow 3\left(f^{-1}\right)'(\theta)<\pi e^{-\frac{\pi}{3}}$

Θέμα Δ

Δ1. Από τη σχέση $f(x)f'(x)-2xf(x)-x^2f'(x)+2x^3=e^{2x}$ έχουμε

$2f(x)f'(x)-4xf(x)-2x^2f'(x)+4x^3=2e^{2x}\Leftrightarrow\left[f^2(x)-2x^2f(x)+x^4\right]'=\left(e^{2x}\right)'\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2x^2f(x)+x^4=e^{2x}+c$, $c\in\mathbb{R}$ (1). Για $x=0$ είναι $f^2(0)=1+c\Leftrightarrow c=0$, οπότε η (1) γίνεται $\left(f(x)-x^2\right)^2=e^{2x}$ (2).

Έστω $g(x)=f(x)-x^2$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξη συνεχών οπότε η σχέση (2) γίνεται $g^2(x)=e^{2x}$ (3) .Όμως $e^{2x}\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $g(x)\neq 0$ και η g είναι συνεχής οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Είναι $g(0)=f(0)=-1<0$,συνεπώς $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα από την σχέση (3) προκύπτει $g(x)=-e^x\Leftrightarrow f(x)-x^2=-e^x\Leftrightarrow f(x)=x^2-e^x, x\in\mathbb{R}$

Δ2. Η συνάρτηση $f(x)=x^2-e^x$ είναι συνεχής στο $[-1,0]$ με $f(-1)=1-\frac{1}{e}>0$ και $f(0)=-1<0$, οπότε $f(-1)f(0)<0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0$.

Επίσης $f'(x)=2x-e^x$ και $f''(x)=2-e^x$

Είναι $f''(x)=2-e^x>0\Leftrightarrow e^x<2\Leftrightarrow x<\ln 2$. Το πρόσημο της f'' και η μονοτονία της f' δίνονται στον διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	↗		↘

Η f' παρουσιάζει μέγιστο στο ln2 οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)\leq f'(\ln 2)=2\ln 2-2=2(\ln 2-1)<0$,άρα $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και το $\rho\in(-1,0)$ είναι μοναδικό.

Αφού η f είναι συνεχής τότε $\lim\limits_{x\to\rho}f(x)=f(\rho)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\rho}\left(f(x)-f(\rho)\right)=0$, επιπλέον $\rho\in(-1,0)$ οπότε $|\rho|<1$ και $\ln|\rho|<0$,άρα $\lim\limits_{x\to\rho}\ln|x|=\ln|\rho|<0$.

Αν $x<\rho\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(\rho)\Leftrightarrow f(x)-f(\rho)>0$ και $\lim\limits_{x\to\rho^-}\frac{1}{f(x)-f(\rho)}=+\infty$, άρα

$$\lim_{x\to\rho^-}\frac{\ln|x|}{f(x)-f(\rho)}=\lim_{x\to\rho^-}\left(\frac{1}{f(x)-f(\rho)}\ln|x|\right)=-\infty$$

Αν $x>\rho\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(\rho)\Leftrightarrow f(x)-f(\rho)<0$ και $\lim\limits_{x\to\rho^+}\frac{1}{f(x)-f(\rho)}=-\infty$, άρα

$\lim\limits_{x\to\rho^+}\frac{\ln|x|}{f(x)-f(\rho)}=\lim\limits_{x\to\rho^+}\left(\frac{1}{f(x)-f(\rho)}\ln|x|\right)=+\infty$. Επομένως, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\rho}\frac{\ln|x|}{f(x)-f(\rho)}$.

Δ3. α) Είναι το $f(1)=1-e$ και το $f'(1)=2-e$,οπότε η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0=1$ είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1+e=(2-e)(x-1)\Leftrightarrow y=2x-1-ex$.

Η f είναι κοίλη στο $(\ln 2,+\infty)$, συνεπώς η C_f θα βρίσκεται κάτω από οποιαδήποτε εφαπτομένη, δηλαδή $f(x)\leq 2x-1-ex\Leftrightarrow f(x)+ex\leq 2x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Οπότε για $x>1$ θα είναι $f(x)+ex<2x-1$.

β) Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $[1,x]$ και $\left[x,x^2\right]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(1,x): f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $\xi_2\in\left(x,x^2\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f\left(x^2\right)-f(x)}{x^2-x}$. Είναι

$$1<\xi_1<\xi_2\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(1)}{x-1}>\frac{f\left(x^2\right)-f(x)}{x(x-1)}\overset{\cdot x(x-1)>0}{\Leftrightarrow}xf(x)-xf(1)>f\left(x^2\right)-f(x)\Leftrightarrow$$

$$xf(x)+f(x)>f\left(x^2\right)+x(1-e)\Leftrightarrow(x+1)f(x)+ex>f\left(x^2\right)+x$$

Δ4. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $f\left(f(x)-x^2\right)=(x+3)^2-\dfrac{1}{e^{x+3}}\Leftrightarrow f\left(f(x)-x^2\right)=(-x-3)^2-e^{-x-3}$

$$\Leftrightarrow f\left(f(x)-x^2\right)=f(-x-3)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow}f(x)-x^2=-x-3\Leftrightarrow -e^x=-x-3\Leftrightarrow e^x-x-3=0$$

Έστω $g(x)=e^x-x-3, x\in\mathbb{R}$ με $g'(x)=e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$. Το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g δίνονται στον διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x-3\right)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{2}{e^x}\right)\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,0]$ με σύνολο τιμών

$g(A_1)=\left[g(0),\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=[-2,+\infty)$ και αφού $0\in g(A_1)$ τότε υπάρχει μοναδικό $\rho_1\in(-\infty,0)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho_1)=0$. Επίσης, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=[0,+\infty)$ με σύνολο τιμών

$g(A_2)=\left[g(0),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=[-2,+\infty)$ και αφού $0\in g(A_2)$ τότε υπάρχει μοναδικό $\rho_2\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho_2)=0$. Οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες.

Δ5. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε για

$x<x+1\Leftrightarrow f(x)>f(x+1)\Leftrightarrow x^2-e^x>(x+1)^2-e^{x+1}\Leftrightarrow e^x+2x+1-e^{x+1}<0$ (4)

Η συνάρτηση $h(x)=e^x+x^2+x-e^{x+1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x)=e^x+2x+1-e^{x+1}<0$ από τη σχέση (4). Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και για

$x>0\Leftrightarrow h(x)<h(0)=1-e<0$.

Επομένως, $h(x)<0$ όταν $x\in[0,1]$ άρα

$$E(\Omega)=\int_0^1|h(x)|dx=-\int_0^1h(x)dx=\int_0^1\left(e^{x+1}-e^x-x^2-x\right)dx=\left[e^{x+1}\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=e^2-e-e+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=e^2-2e+\frac{1}{6}\ \text{τ.μ.}$$