

Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis 2021 - 2022



Αντώνης Βαλέργας
Στέλιος Μιχαήλογλου
Δημήτρης Πατσιμάς
Νίκος Σαμπάνης

Αποστόλης Κακαβάς
Άγγελος Μπλιάς
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Βαγγέλης Τόλης

Νίκος Τούντας

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι:

$$f'(x_0) = 0$$

μονάδες 7

A2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με $\int_a^\beta f(x) dx > 0$, τότε είναι και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

μονάδες 1+3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\int_{-a}^a (x^4 + 1) dx < \int_{-a}^a (x^4 + x^2 + 1) dx$, για κάθε $a > 0$.

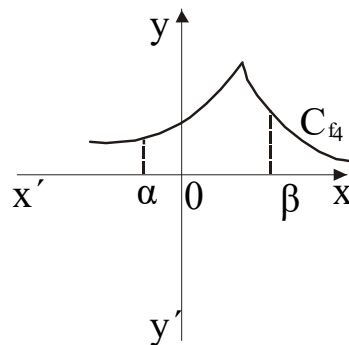
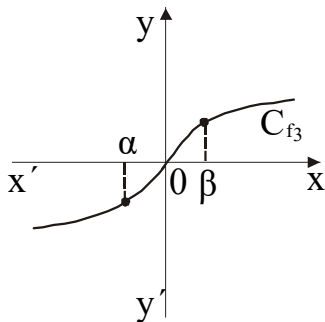
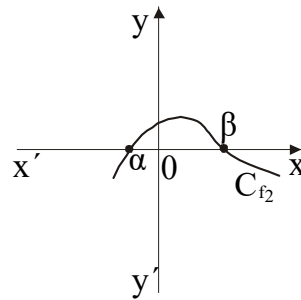
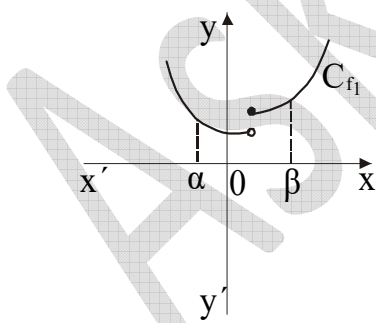
β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 1$.

μονάδες 6

A5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις.

A) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3, f_4 .



Αυτές που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[a, \beta]$ είναι οι

- α) f_2 και f_4 β) μόνο η f_4 γ) μόνο η f_2 δ) f_2 και f_3 ε) f_1 και f_4

B) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} . Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε ποια από τις παρακάτω συνθήκες πρέπει επιπλέον να ισχύει ώστε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

- α) f, g συνεχείς στο \mathbb{R} β) $f(0) = g(0)$ γ) $f''(0) = g''(0)$
 δ) $f''(x) = g''(x)$ ε) καμία άλλη συνθήκη

μονάδες 4

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} - 2$ και $g(x) = \sqrt{8-x}$.

B1. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$ και $\frac{g}{f}$.

μονάδες 2+2

B2. Να βρείτε τη συνάρτηση $h(x) = g \circ f$.

μονάδες 5

B3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να ορίσετε την αντίστροφη της και να βρείτε τον τύπο της.

μονάδες 5

B4. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

μονάδες 5

B5. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{g(x)}{f(x)}$ και β) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \ln \frac{g(x)}{f(x)}$

μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x^2 - 2x|}{x^2}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 3

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης αν υπάρχουν.

μονάδες 5

Γ3. Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

μονάδες 4

Γ4. Να βρείτε :

- (i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
 (ii) Το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$

μονάδες 3+4

Γ5. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda \in (3, 4)$ ώστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$, να είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = \lambda$.

μονάδες 6

Θέμα Δ

Έστω ότι για την παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f ισχύει $f(x) = |e^{x^2-1} - a(x^2-1) - 1|$, $a \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $a = 1$ και $f(x) = e^{x^2-1} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική θετική ρίζα x_0 και αν

$B(x_1, f(x_1))$, $\Gamma(x_2, f(x_2))$ συμμετρικά σημεία της C_f ως προς τον άξονα $y'y$ με $x_1 > 0$ ώστε $f(x_1)f(x_2) = 1$, τότε να αποδείξετε ότι $x_1 = x_0$ και $x_2 = -x_0$.

μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{x^2-1} dx$.

μονάδες 4

Δ4. Αν $g(x) = xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$ τότε :

i. Για κάθε $\lambda > 0$ να υπολογίσετε το $\int_{-\lambda}^{\lambda} g(x) dx$.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = x_0$, όπου ο x_0 είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός για τον οποίο ισχύει

$$f(x_0) = f(-x_0) = 1, \text{ είναι } E(\Omega) = \frac{2e(x_0^2 + 1) - 2 - ex_0^4}{4e}.$$

μονάδες 8

Ευχόμαστε Επιτυχία!