



**1\_Διαγώνισμα\_2022**

**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A<sub>1</sub>.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , να δείξετε ότι  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

(Μονάδες 7)

**A<sub>2</sub>.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1;

(Μονάδες 4)

**A<sub>3</sub>.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

**A<sub>4</sub>.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι «1-1» και το  $M(\alpha, \beta)$  είναι σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$ , τότε το σημείο  $\Lambda(\beta, \alpha)$  είναι σημείο της γραφικής παράστασης της  $f^{-1}$ .

(Μονάδες 2)

**β.** Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$  και η  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

(Μονάδες 2)

**γ.** Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

(Μονάδες 2)

**δ.** Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

(Μονάδες 2)

**ε.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \text{ ή } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1.$$

(Μονάδες 2)



## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu\alpha x}{x} + 3, & x > 0 \\ x^3 - 3x^2 + 5, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha \text{ πραγματικός αριθμός με } \alpha \neq 0.$$

**B<sub>1</sub>.** Να δείξετε ότι  $\alpha = 2$ .

(Μονάδες 5)

Για  $\alpha = 2$ .

**B<sub>2</sub>.** Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$  και στην συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$

στο σημείο  $A\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ .

(Μονάδες 6+3)

**B<sub>3</sub>.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(Μονάδες 5)

**B<sub>4</sub>.** Να δείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός  $k$  με

$k \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$  τέτοιος ώστε να ισχύει  $(\pi + 2)f'(k) = 4$ .

(Μονάδες 6)

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) = \int_0^x (e^t + 1) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- Η  $g$  είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$  και ικανοποιεί την σχέση  $g(x) + e^{g(x)} = 2022x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ<sub>1</sub>.** Να αποδείξετε ότι ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = e^x + x - 1$  και στη συνέχεια να βρείτε τις ρίζες της και το πρόσημό της.

(Μονάδες 5)



## Ασκησόπολις

ο πιο πλούσιος κόσμος  
θεμάτων και ασκήσεων

Γ<sub>2</sub>. Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετε από την γραφική παράσταση της  $f$  τον άξονα  $x'$  και τις ευθείες  $x = -2$  και  $x = 2$ , να αποδείξετε ότι  $E > 8,25$ .

(Μονάδες 5)

Γ<sub>3</sub>. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 5)

Γ<sub>4</sub>. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

Γ<sub>5</sub>. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:  $(g \circ g)(x) - g(1 - x^{2022}) = 0$ , έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0,1)$ .

(Μονάδες 5)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες. Για τις οποίες ισχύουν  $f(0) = g(0)$ ,  $f(1) = g(1) + 1$

και  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 3f(x) + 2f(x-h)}{h^2} = 3g''(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Δ<sub>1</sub>. i. Να αποδείξετε ότι:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 3f(x) + 2f(x-h)}{h^2} = 3f''(x)$ .

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = g(x) + x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 4)

Δ<sub>2</sub>. Αν η συνάρτηση  $g$  έχει δύο ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  ετερόσημες, τότε η συνάρτηση  $f$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(\rho_1, \rho_2)$ .

(Μονάδες 5)



## Ασκησόπολις

ο πιο πλούσιος κόσμος  
θεμάτων και ασκήσεων

**Δ<sub>3</sub>.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (2022x^4 + x + 1) \cdot [f(x) - g(x)] \cdot \eta\mu \frac{1}{x^5} \right]$

(Μονάδες 6)

**Δ<sub>4</sub>.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  και τις ευθείες  $x = -2$  και  $x = 4$ .

(Μονάδες 4)

