1_Διαγώνισμα_2022
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

(Μονάδες 7)

Α₂. Πότε μια συνάρτηση f είναι $1-1$;

(Μονάδες 4)

Α₃. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

Α₄. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι «$1-1$» και το $M(\alpha,\beta)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f, τότε το σημείο $\Lambda(\beta,\alpha)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f^{-1}.

(Μονάδες 2)

β. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

(Μονάδες 2)

γ. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

(Μονάδες 2)

δ. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

(Μονάδες 2)

ε. Αν $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι

$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x) = -1$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu\alpha x}{x}+3 & ,x>0 \\ x^3-3x^2+5 & ,x\le 0 \end{cases}$$ όπου α πραγματικός αριθμός με $\alpha \neq 0$.

Β₁ . Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

(Μονάδες 5)

Για $\alpha = 2$.

Β₂. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f και στην συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f

στο σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2},3\right)$.

(Μονάδες 6+3)

Β₃. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(Μονάδες 5)

Β₄. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός k με $k\in\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $(\pi+2)f'(k)=4$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x)=\int_0^x \left(e^t+1\right) dt$, $x\in\mathbb{R}$.

- Η g είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί την σχέση $g(x)+e^{g(x)}=2022x+1$,$x\in\mathbb{R}$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=e^x+x-1$ και στη συνέχεια να βρείτε τις ρίζες της και το πρόσημό της.

(Μονάδες 5)

Γ₂. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετε από την γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-2$ και $x=2$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{E}>8{,}25$.

(Μονάδες 5)

Γ₃. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 5)

Γ₄. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

Γ₅. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(g\circ g)(x)-g(1-x^{2022})=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες. Για τις οποίες ισχύουν $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)+1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-3f(x)+2f(x-h)}{h^2}=3g''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₁. **i.** Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-3f(x)+2f(x-h)}{h^2}=3f''(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=g(x)+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

Δ₂. Αν η συνάρτηση g έχει δύο ρίζες ρ_1 , ρ_2 ετερόσημες, τότε η συνάρτηση f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\rho_1\ ,\rho_2)$.

(Μονάδες 5)

Δ₃. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2022x^4+x+1)\cdot\left[f(x)-g(x)\right]\cdot ημ\dfrac{1}{x^5}\right]$

(Μονάδες 6)

Δ₄. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x=-2$ και $x=4$.

(Μονάδες 4)

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α$_1$. Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x)=F(x)+c$. (1) Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε

$G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$,

οπότε, για $x=\beta$, έχουμε $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$

και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

Α$_2$. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1-1», όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1\neq x_2$, τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Α$_3$. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha\ ,\ \beta)$ και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}\ .$$

Α$_4$. α ⟶ Σ, β ⟶ Σ, γ ⟶ Λ, δ ⟶ Λ, ε ⟶ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β$_1$. Επειδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της δηλαδή στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο 0 άρα $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ (1)

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^3-3x^2+5)=5=f(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu\alpha x}{x}+3\right) = 3+\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu\alpha x}{x} = 3+\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha\cdot\eta\mu\alpha x}{\alpha x} \underset{\substack{x\to 0\\ u\to 0}}{\overset{\alpha x=u}{=}}$$

$$3+\alpha\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 3+\alpha\cdot 1 = 3+\alpha .$$

Επομένως από την (1) παίρνουμε $3+\alpha=5 \Leftrightarrow \alpha=2$.

B₂. Για $\alpha=2$ είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}+3 & ,x>0\\ x^3-3x^2+5 & ,x\le 0\end{cases}$

Για $x<0$ είναι $f'(x)=3x^2-6x$

Για $x>0$ είναι $f'(x)=\dfrac{(\eta\mu 2x)'x-\eta\mu 2x(x)'}{x^2}+0=\dfrac{2x\sigma\upsilon\nu 2x-\eta\mu 2x}{x^2}$

Για $x=0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-3x^2+5-5}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(x-3)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left[x(x-3)\right]=0 \quad (2)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\eta\mu 2x}{x}+3-5}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu 2x-2x}{x^2} \overset{(\frac{0}{0})}{=}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sigma\upsilon\nu 2x-2}{2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0^+}(-2\eta\mu 2x)=0 \quad (3)$$

Από τις (2)και (3)προκύπτει $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

Δηλαδή $f'(0)=0$.

Επομένως είναι $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x\sigma\upsilon\nu 2x-\eta\mu 2x}{x^2} & , x>0\\ 3x^2-6x & , x\le 0\end{cases}$

Επειδή $f(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\eta\mu(2\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} + 3 = \dfrac{\eta\mu\pi}{\frac{\pi}{2}} + 3 = 0 + 3$ το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ ανήκει στην C_f επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A είναι

$y - f(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2})$ είναι

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{2\cdot\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu(2\cdot\frac{\pi}{2}) - \eta\mu(2\cdot\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\pi - \eta\mu\pi}{\frac{\pi^2}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

Επομένως $y - f(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow y - 3 = -\frac{4}{\pi}(x - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{\pi}x + 5$.

B₃. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu 2x}{x} + 3\right)$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$-1 \le \eta\mu 2x \le 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu 2x}{x} \le \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} + 3 \le \frac{\eta\mu 2x}{x} + 3 \le \frac{1}{x} + 3 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{x} + 3 \le f(x) \le \frac{1}{x} + 3$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x} + 3\right) = 3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x} + 3\right) = 3$

Επομένως από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x} + 3\right) = 3.$$

B₄. Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε:

Η f είναι συνεχής στο $\left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, \frac{\pi}{2})$

Οπότε από το Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $k \in (-1, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε

$$f'(k)=\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(-1)}{\frac{\pi}{2}-(-1)}=\frac{3-1}{\frac{\pi}{2}+1}=\frac{2}{\frac{\pi}{2}+1}$$

Δηλαδή $f'(k)=\dfrac{2}{\frac{\pi}{2}+1}\Leftrightarrow(\frac{\pi}{2}+1)f'(k)=2\Leftrightarrow(\pi+2)f'(k)=4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. $f(x)=\int_0^x\left(e^t+1\right)dt=\left[e^t+t\right]_0^x=e^x+x-(e^0+0)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Η f έχει προφανή ρίζα το 0 και επειδή $f'(x)=e^x+1>0$, η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1-1$,

επομένως η f έχει μοναδική ρίζα το 0.

Έχουμε:

Για $x<0 \overset{f\ \text{γν. Αυξ}}{\Longleftrightarrow} f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$.

Για $x>0 \overset{f\ \text{γν. Αυξ}}{\Longleftrightarrow} f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	-	0	+

Γ₂. $E=\int_{-2}^{2}|f(x)|\,dx=\int_{-2}^{0}|f(x)|\,dx+\int_0^2|f(x)|\,dx=$

$$-\int_{-2}^{0}(e^x+x-1)\,dx+\int_0^2(e^x+x-1)\,dx=$$

$$-\left[e^x+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-2}^{0}+\left[e^x+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2=$$

$$-\left[e^0-(e^{-2}+2+2)\right]+\left[(e^2+2-2)-e^0\right]=$$

$$-(1-\frac{1}{e^2}-4)+e^2-1=\frac{1}{e^2}+2+e^2=\left(\frac{1}{e}+e\right)^2$$ τετραγωνικές μονάδες.

Είναι $e > 2,5 \Rightarrow e^2 > 6,25 \Leftrightarrow e^2 + 2 > 8,25 \Leftrightarrow e^2 + 2 + \frac{1}{e^2} > 8,25 + \frac{1}{e^2} > 8,25$

Δηλαδή $E > 8,25$

Γ₃. Έστω ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε:

Για $x_1 < x_2$ θα είναι $g(x_1) > g(x_2)$ (1) οπότε και $e^{g(x_1)} > e^{g(x_2)}$ (2)

Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$g(x_1) + e^{g(x_1)} > g(x_2) + e^{g(x_2)} \Leftrightarrow 2022x_1 + 1 > 2022x_2 + 1 \Leftrightarrow$

$2022x_1 > 2022x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$ άτοπο. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

Γ₄. Στην σχέση $g(x) + e^{g(x)} = 2022x + 1$ για $x = 0$ έχουμε

$g(0) + e^{g(0)} = 1 \Leftrightarrow g(0) + e^{g(0)} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$f\big(g(0)\big) = f(0) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} g(0) = 0$, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ₅. Η εξίσωση $(g \circ g)(x) - g(1 - x^{2022}) = 0$ γράφεται

$(g \circ g)(x) - g(1 - x^{2022}) = 0 \Leftrightarrow g(g(x)) = g(1 - x^{2022}) \underset{1-1}{\overset{g\ \text{γν. Αυξ}}{\Leftrightarrow}}$

$g(x) = 1 - x^{2022} \Leftrightarrow g(x) - 1 + x^{2022} = 0$.

Θεωρώ συνάρτηση $h(x) = g(x) - 1 + x^{2022}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$h(0)=g(0)-1=-1<0$$

$$h(1)=g(1)>0 \quad \text{γιατί} \quad 1>0 \overset{g\ \gamma\nu.\ \text{Αυξ}}{\Leftrightarrow} g(1)>g(0) \Leftrightarrow g(1)>0$$

Άρα $h(0)h(1)<0$ οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ,

η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. i. Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-3f(x)+2f(x-h)}{h^2}\overset{(\frac{0}{0})}{=}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)(x+2h)'+2f'(x-h)(x-h)'}{2h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2f'(x+2h)-2f'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x-h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)+f'(x)-f'(x-h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{h}=2f''(x)-\big(-f''(x)\big)=3f''(x).$$

Γιατί :

- $$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}\underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{2h=u}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{f'(x+u)-f'(x)}{\frac{u}{2}}=$$

  $$2\lim_{u\to 0}\frac{f'(x+u)-f'(x)}{u}=2f''(x)$$

- $$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{h}\underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{-h=u}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{f'(x+u)-f'(x)}{-u}=$$

$$-\lim_{u\to 0}\frac{f'(x+u)-f'(x)}{u}=-f''(x)$$

ii. Από την σχέση $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-3f(x)+2f(x-h)}{h^2}=3g''(x)$ προκύπτει

$3f''(x)=3g''(x)\Leftrightarrow f''(x)=g''(x)$ οπότε διαδοχικά έχουμε

$f'(x)=g'(x)+c_1$ και $f(x)=g(x)+c_1x+c_2$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=g(0)+c_2$, άρα $c_2=0$, αφού $f(0)=g(0)$.

Άρα $f(x)=g(x)+c_1x$.

Για $x=1$ είναι $f(1)=g(1)+c_1$, άρα $c_1=1$, αφού $f(1)=g(1)+1$.

Επομένως είναι $f(x)=g(x)+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₂. Επειδή ρ_1 , ρ_2 ετερόσημες ρίζες της g, θα ισχύει
$g(\rho_1)=g(\rho_2)=0$ και $\rho_1\cdot\rho_2<0$.

Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1 , \rho_2]$(η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) και ισχύει

$$f(\rho_1)=g(\rho_1)+\rho_1=0+\rho_1=\rho_1$$

$$f(\rho_2)=g(\rho_2)+\rho_2=0+\rho_2=\rho_2$$

Άρα $f(\rho_1)f(\rho_2)=\rho_1\cdot\rho_2<0$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano , η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1 , ρ_2).

Δ₃. $$\lim_{x\to+\infty}\left[(2022x^4+x+1)\cdot[f(x)-g(x)]\cdot ημ\frac{1}{x^5}\right]\overset{f(x)-g(x)=x}{=}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(2022x^4+x+1)\cdot x\cdot ημ\frac{1}{x^5}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(2022x^5+x^2+x)\cdot ημ\frac{1}{x^5}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(2022x^5+x^2+x)}{x^5}\cdot x^5 ημ\frac{1}{x^5}\right]=2022\cdot 1=2022$$

Γιατί:

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2022x^5+x^2+x)}{x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2022x^5}{x^5}=2022$$

- $$\lim_{x\to+\infty}x^5 ημ\frac{1}{x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ημ\frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}}\underset{\substack{x\to+\infty\\u\to 0}}{\overset{u=\frac{1}{x^5}}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{ημu}{u}=1$$

Δ₄. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x=-2$ και $x=4$ είναι

$$E=\int_{-2}^{4}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_{-2}^{4}|x|\,dx=\int_{-2}^{0}(-x)\,dx+\int_{0}^{4}x\,dx=$$

$$\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}=(0+2)+(8-0)=10 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$