

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 1 ΜΑΙΟΥ 2022
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.

Μονάδες 7

A2. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B , αντίστοιχα. Πώς ορίζεται η πρόσθεση των συναρτήσεων f, g ;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μονάδες 4

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = k$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -k$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Όταν για μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A ισχύει $f(x) \geq \lambda$ για κάθε $x \in A$, τότε το λ είναι ολικό ελάχιστο της f .

β) Για κάθε ζεύγος συνεχών συναρτήσεων f, g στο $[\alpha, \beta]$ με

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx, \text{ ισχύει } f(x) \leq g(x) \text{ για κάθε } x \text{ στο } [\alpha, \beta].$$

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1)$, με $x > -1$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f . Στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x=0$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στη C_f , στην ευθεία (ε) και στην ευθεία $x=2$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 4]$ και ισχύει: $2f(x)f'(x) = -1$, για κάθε $x < 4$ με $f(3) = 1$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = 3 + x^2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 6

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε $f(x) = \sqrt{4-x}$.

Γ2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = (f \circ g)(x)$.

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε το σημείο $A(x, f(x))$, $0 < x < 4$ για το οποίο μεγιστοποιείται το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου B η προβολή του A πάνω στον άξονα των x και O η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 5

Γ4. Το υλικό σημείο $K(x, \sqrt{1-x^2})$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = h(x)$ με $-1 \leq x < 0$.

α) Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του K ισούται με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, αν υποθεθεί ότι $x'(t) \neq 0$, για $t \geq 0$.

β) Αν την ίδια χρονική στιγμή είναι $x'(t_0) = 2$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω που σχηματίζει η OK με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' .

Μονάδες 6

Γ5. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $\int_0^1 \frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)} dx < \ln \sqrt{\frac{4}{3}}$.

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^x, & x \geq 1 \\ ax^2 - bx + 1, & x < 1 \end{cases}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και η συνεχής συνάρτηση g στο $[1, e]$ για την οποία ισχύει $\int_1^e g^2(x) dx \leq \int_1^e 2 \ln x g(x) dx + 2 - e$.

Δ1. Αν $a = b$, να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[0, 1]$.

Μονάδες 3

Δ2. Να βρείτε τις τιμές των a, b για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Μονάδες 5

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρείστε ότι $a = b = 1$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x + 3$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \ln x$ και στη συνέχεια ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g στο $[1, e]$.

Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ισχύει $f(x) + \sqrt{3f(x)} + x^2 - x = 2$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

- Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
- Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ