ΠΡΟΣΟΜΕΙΩΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΟΚΤΩ (8)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό.

«Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο Α που είναι ένωση διαστημάτων και $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του $x \in A$,τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Α.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α ,αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ ,αν είναι ψευδής.(μονάδες 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

β. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ΄ ανάγκην $f(\beta)>0$.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» απ τη γραφική της παράσταση.

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x)\geq 0$ $x \in [\alpha, \beta]$, τότε :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \geq 0$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x+1, x>0 \\ 1, x=0 \end{cases}$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και μη παραγωγίσιμη στο x=0.

Μονάδες 6

Β2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f και να δειχθεί ότι η εξίσωση :

$$f(x)=\frac{2}{e}$$

έχει ακριβώς δυο ρίζες.

Μονάδες 5

Β4. Να δειχθεί ότι η f είναι κυρτή και να βρεθεί η εφαπτομένη της στο σημείο Α(1, f(1)).

Μονάδες 4

Β5. Να δειχθεί ότι $f(x)\geq x$ για κάθε $x\geq 0$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\ln(x^2+1)$, $x\in R$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. Μονάδες 4

Γ2. Να λυθεί η ανίσωση $f(2e^x)>f(e(x^2+1))$. Μονάδες 6

Γ3. Να βρεθεί ο θετικός ακέραιος α τέτοιος ώστε στο διάστημα (α, α+1) η εξίσωση :

$$f(\ln x+x)=f(2)$$

να έχει ακριβώς μια ρίζα. Μονάδες 6

Γ4. Να δειχθεί ότι οι εφαπτομένες στα $x_1=-1$ και $x_2=1$ διαπερνούν τη γραφική παράσταση της f . Μονάδες 5

Γ5. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_o, f(x_o))$ με $x_o\in(1,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f να είναι παράλληλη με την ευθεία η: $y=\ln\left(\frac{2e}{5}\right)\cdot x$ Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $h(x)= e^{x}$, $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_o \in (0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε την συνάρτηση $f(x)= e^{x} - \ln x$, $x>0$

Δ2. Να δείξετε ότι η f έχει ακρότατο στο x_o με $f(x_o)>2$.

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει :

$$(x+1)\, f(x)<f(x^2)+x\cdot e$$

Μονάδες 6

Δ4. Αν E(t) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απ την C_f ,τον άξονα xx΄ και τις ευθείες $x=1$ και $x=t$, $0<t<1$, να δείξετε ότι:

i. $E(t)=t\cdot\ln t- e^{t}-t+e+1$. Μονάδες 3

ii. $\lim\limits_{t\to 0}E(t) = e$. Μονάδες 2

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει . Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή .

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ του Διαγωνίσματος

ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΑΛΑΜΑΝΗΣ, μαθηματικός του 3ου ΓΕΛ Γιαννιτσών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

από τον επιμελητή του

I like maths
Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω !

Ιορδάνη Χ. Κοσόγλου, Msc μαθηματικό του ΓΕΛ Εξαπλατάνου

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Σελίδα 111 σχολικού βιβλίου.

Α2. α) Ψ.

β) Αντιπαράδειγμα στη σελίδα 134 του σχολικού.

Α3. Σελίδα 157 σχολικού βιβλίου, ο Ορισμός.

Α4. α)Λ β)Σ γ)Λ δ)Σ ε)Σ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 + 1 = 1 = f(0)$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0$

- Άρα η f είναι συνεχής στο 0.
- Για κάθε x>0 , η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών, συνεπώς η f συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln x}{x} = \lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Β2. Είναι $f'(x)=\ln x + 1$, x>0

- Η $f'(x)=0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$
- Η $f'(x)>0 \Rightarrow x > \frac{1}{e}$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{e}, +\infty)$
- Η $f'(x)<0 \Rightarrow x < \frac{1}{e}$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\frac{1}{e}]$
- Το σημείο $(\frac{1}{e}. f(\frac{1}{e})) = (\frac{1}{e} , \frac{e-1}{e})$ είναι ολικό ελάχιστο αυτής.

Β3. Είναι $f([0,\frac{1}{e}])=[f(\frac{1}{e}), \lim\limits_{x\to 0}f(x)] = [\frac{e-1}{e}, 1]$

Ομοίως , $f([\frac{1}{e}. +\infty))=[f(\frac{1}{e}), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)) = [\frac{e-1}{e},+\infty)$

Συνεπώς, το Σ.Τ της f είναι το $[\frac{e-1}{e},+\infty)$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\frac{1}{e}]$ και η τιμή $\frac{2}{e} \in [\frac{e-1}{e}, 1)$ γιατί $\frac{2}{e} < 1$ μιας και ο αριθμητής είναι μικρότερος του παρονομαστή και $\frac{2}{e} > \frac{e-1}{e}$ που ισχύει μιας και 2>e-1.
  Άρα η εξίσωση $f(x)=\frac{2}{e}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,\frac{1}{e}]$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα $[\frac{1}{e}, +\infty)$ και η τιμή $\frac{2}{e} \in [\frac{e-1}{e}, +\infty)$ γιατί
  Άρα η εξίσωση $f(x)=\frac{2}{e}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[\frac{e-1}{e},+\infty)$

Άρα η εξίσωση $f(x)=\frac{2}{e}$ έχει ακριβώς δυο ρίζες

Β4. Είναι $f''(x)=\frac{1}{x} > 0$ για κάθε x>0 άρα η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$

Η εφαπτομένη της στο Α είναι : $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ ή $y=x$

Β5. Η f είναι κυρτή και η ευθεία y=x είναι εφαπτομένη της στο Α, άρα προκύπτει το ζητούμενο. Το «=» ισχύει για x=1.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Είναι $f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα από Θεώρημα ,η f είναι γνησίως αύξουσα στο R $\Longrightarrow$ η f είναι 1-1 ,συνεπώς αντιστρέφεται.

Γ2. Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(2e^x)>f(e(x^2+1)) \overset{f\nearrow}{\Longleftrightarrow}$$

$$2e^x>e(x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$x-\ln(x^2+1)>1-\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x)>f(1) \Leftrightarrow$$

$$x>1$$

Γ3. Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται :

$$f(\ln x + x) = f(2) \Leftrightarrow$$

$$\ln x + x = 2 \Leftrightarrow$$

$$t(x) = 0, \text{ όπου } t(x) = \ln x + x - 2$$

- Η t συνεχής στο [1,2] και γνησίως αύξουσα μιας και $t'(x)=\frac{1}{x}+1>0$
- $t(1)=-1<0$
- $t(2)=\ln 2>0$

Από Θ.Μπολζάνο υπάρχει $x_0 \in (1,2)$, ώστε $t(x_0)=0$,συνεπώς ο ζητούμενος θετικός ακέραιος α είναι το 1.

Γ4. Είναι συνεχής στο R και $f''(x)=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}, x \in R$

- Η $f''(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$
- Η $f''(x)>0 \Rightarrow x>1$ ή $x<-1$, η f είναι ΚΥΡΤΗ στα $[1,+\infty)$,$(-\infty,-1]$
- Η $f''(x)<0 \Rightarrow -1<x<1$, η f είναι ΚΟΙΛΗ στο $[-1,1]$
- Τα σημεία $(1.f(1)) = (-1\,, f(-1)\,)$ είναι Σ.Κ αυτής άρα σε αυτά η εφαπτομένη διαπερνά τη γραφική παράσταση της f.

Γ5. <u>Α΄ τρόπος (του κ. Ι. Σαλαμάνη)</u>

Εφαρμόζω ΘΜΤ για την f στο διάστημα [1,2].

- Η f είναι συνεχής στο [1,2]
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (1,2)

Συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ ώστε $f'(x_0)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)$

$$=2-\ln 5-1+\ln 2$$

$$=1+\ln\frac{2}{5}$$

$$=\ln e+\ln\frac{2}{5}$$

$$=\ln\left(\frac{2e}{5}\right)$$

<u>Β΄ τρόπος (του κ. Ι. Κοσόγλου)</u>

Η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$. Άρα η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο ίδιο διάστημα όπως και στο [1,2]. Επίσης η f΄ είναι συνεχής.

Έχω, $f'([1,2])=[f'(1),f'(2)]=[0,\frac{1}{5}]$

Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $x_o \in (1,2)$ ώστε $f'(x_o)=\ln\left(\frac{2e}{5}\right)$ ·το οποίο θα είναι μοναδικό μιας και η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Δηλαδή αρκεί : $0 < \ln\left(\frac{2e}{5}\right) < \frac{1}{5}$, το αριστερό μέλος ισχύει μιας και ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή, δηλαδή $\frac{2e}{5} > 1$ ·.

Είναι επίσης $\ln\left(\frac{2e}{5}\right) < \frac{2e}{5} - 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2e}{5}\right) < \frac{2e-5}{5}$

Αρκεί λοιπόν, να ισχύει $\frac{2e-5}{5} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{2e}{5} < \frac{6}{5} \Leftrightarrow 2e < 6 \Leftrightarrow e < 3$ που ισχύει.

Οπότε $0 < \ln\left(\frac{2e}{5}\right) < \frac{2e-5}{5} < \frac{1}{5}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ την $h(x)-\varphi(x)=\rho(x)$, $x \neq 0$

- Στο $(-\infty,0)$ δεν έχουν κοινό σημείο μιας και $\rho(x)>0$
- Για κάθε $x>0$ $\rho'(x)= e^x + \frac{1}{x^2} > 0$ άρα η ρ είναι γνησίως αύξουσα ,οπότε έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης $\lim_{x\to 0^+}\rho(x) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty}\rho(x) = +\infty$

Άρα η $\rho(x)$ έχει μοναδική θετική ρίζα έστω x_o.

Δ2. Είναι $f'(x)= e^x - \frac{1}{x} = \rho(x)$, $f''(x)=\rho'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα και έχει μοναδική θετική ρίζα όπως δείξαμε στο Δ1.

x	0	x_o	$+\infty$
f''	$+$		$+$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	Ο.Ε	↗

Επειδή $e^{x_o} \geq x_o + 1$ (1) και $-\ln x_o \geq -x_o+1$ (2), προσθέτοντας κατά μέλη της (1),(2) έχω : $f(x_o)>2$

Δ3. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ για την f στο $[x, x^2]$ και στο $[1, x]$

Άρα υπάρχουν τουλάχιστον

$$\xi_1 \in (1, x) \text{ ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f(x)-e}{x-1}$$

$$\xi_2 \in (x, x^2) \text{ ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x^2)-f(x)}{x(x-1)}$$

Και ,

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)-e}{x-1} < \frac{f(x^2)-f(x)}{x(x-1)} \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}$$

Το ζητούμενο.

Δ4.

i. Το ζητούμενο εμβαδόν χωρίου είναι ίσο με :

$E(\Omega) = \int_t^1 (e^x - \ln x)dx$, γιατί η f είναι θετική μιας και ελάχιστο της είναι μεγαλύτερο του 2

Είναι $E(\Omega) = [e^x - x\ln x + x]_t^1 = t\ln t - e^t - t + e + 1$

ii. $\lim_{t\to 0} E(t) = 0 - 1 - 0 + e + 1 = e$

Καλή Επιτυχία στις εξετάσεις!

I like maths

Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω !