

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πέμπτη 28/04/2022

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και  $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$  τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ . (Μονάδες 8)

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της συνάρτησης  $f$  στο  $\Delta$ ; (Μονάδες 3)

**A3.** Έστω ο ισχυρισμός: « Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$  ».

(α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (Μονάδες 1)

(β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **A3**(α). (Μονάδες 3)

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Ισχύει ότι:  $\eta\mu x = x \Leftrightarrow x = 0$

(β) Αν μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

(γ) Αν για μία συνάρτηση  $f$  μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Rolle στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  τότε η  $f$  δεν είναι αντιστρέψιμη.

(δ) Κάθε ολικό ακρότατο μιας συνάρτησης είναι και τοπικό ακρότατο αυτής.

(ε) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  τότε το  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της  $f$  με τον άξονα  $x'x$  τα οποία βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της  $f$  με τον άξονα  $x'x$  τα οποία βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$ . (Μονάδες 10)

### ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ ,  $x > 0$ .

**B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

**B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 7)

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 5)

**B4.** Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης  $f$  (μονάδες 2) και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση (μονάδες 4). (Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{1-x}$ ,  $x \leq 1$  και  $g(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ .  
(Μονάδες 5)

Για τα υπόλοιπα ερωτήματα δίνεται ότι:  $f^{-1}(x) = 1 - x^2$ ,  $x \geq 0$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f^{-1} \circ g$  ορίζεται στο  $[0, \pi]$  (μονάδες 2) και να βρείτε ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης  $h$  για την οποία ισχύει  $h^2(x) = (f^{-1} \circ g)(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$  (μονάδες 4).  
(Μονάδες 6)

**Γ3.** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f^{-1}$  που απέχει από το σημείο  $N(3,1)$  την ελάχιστη απόσταση.  
(Μονάδες 7)

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι  $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{g(x)}{f^{-1}(x)} dx < \frac{1}{2} \ln 2$ .  
(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(1) = 2 \ln 2$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:  $(x^2 + x)f'(x) = xf(x) - x - 1$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ,  $x > 0$ , είναι σταθερή στο  $(0, +\infty)$  (μονάδες 4) και με τη βοήθεια της να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  (μονάδες 2).  
(Μονάδες 6)

Για τα υπόλοιπα ερωτήματα δίνεται ότι:  $f(x) = (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ,  $x > 0$ .

**Δ2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  (μονάδες 5) και να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = 1 - e^{-x}$  (μονάδες 2).  
(Μονάδες 7)

**Δ3.** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  (μονάδες 3) και να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = (1+x) \ln 2 + 1 - x$  (μονάδες 4).  
(Μονάδες 7)

**Δ4.** Ένα σημείο  $M(x, y)$ , ξεκινώντας από κάποιο σημείο με τετμημένη μικρότερη του  $\frac{1}{3}$ , κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με την τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό  $1 \text{ cm/s}$ . Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η τεταγμένη του τη στιγμή που το σημείο διέρχεται από το σημείο  $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ .  
(Μονάδες 5)