

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ****Γ' Γενικού Λυκείου****ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.

Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι ακρότατο και ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ . **Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού. **Μονάδες 3**

**A3.** Αν  $E(\Omega) = \int_0^\alpha f(x) dx$ , το εμβαδόν

του χωρίου που περιλείεται της γραφικής παράστασης της  $f$  του διπλανού σχήματος, των αξόνων  $x'$ ,  $y'$  και της ευθείας  $x = \alpha$ , να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας, τα παρακάτω κενά

1. Για  $\alpha = 0$  είναι:

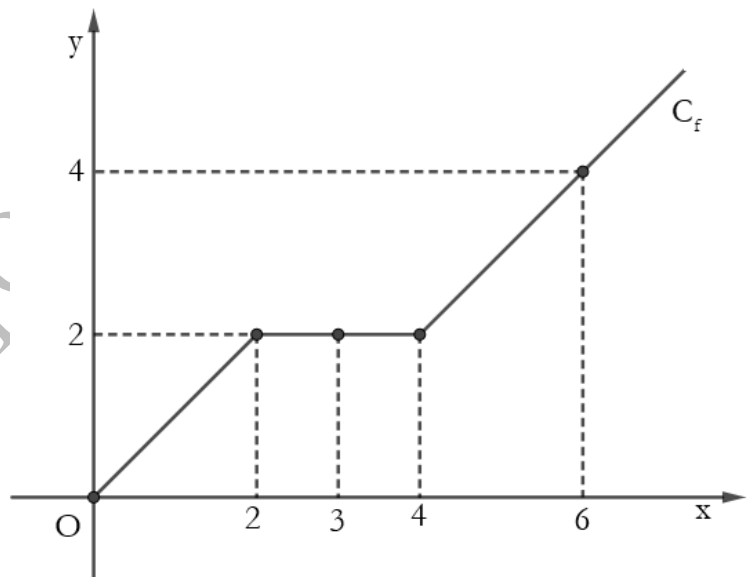
$E(\Omega) = \dots$  τετραγωνικές μονάδες

2. Για  $\alpha = 2$  είναι:  $E(\Omega) = \dots$  τετραγωνικές μονάδες

3. Για  $\alpha = 3$  είναι:  $E(\Omega) = \dots$  τετραγωνικές μονάδες

4. Για  $\alpha = 4$  είναι:  $E(\Omega) = \dots$  τετραγωνικές μονάδες

5. Για  $\alpha = 6$  είναι:  $E(\Omega) = \dots$  τετραγωνικές μονάδες



**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η γραφική παράσταση της  $|f|$  αποτελείται από τα τμήματα της  $C_f$ , που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$ , και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα  $x'x$ , των τμημάτων της  $C_f$ , που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

Μονάδες 2

β. Αν είναι  $0 < \alpha < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$ .

Μονάδες 2

γ. Για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$  ισχύει  $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ .

Μονάδες 2

δ. Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν ισχύει ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Μονάδες 2

ε. Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f$  σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , το ολοκλήρωμα  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

Μονάδες 2

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 + 3x + \beta$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα  $x'x$  στο σημείο με τετμημένη 1.

**B1.** Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών  $\alpha, \beta$ .

Μονάδες 4

Για  $\alpha = -1$  και  $\beta = -2$ , να:

**B2.** μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

**B3.** βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$ , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 6

**B4.** υπολογίστε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{f'(x) - 3}$

Μονάδες 5

**B5.** υπολογίστε το ολοκλήρωμα:  $\int_1^e (f(x) \cdot \ln x) dx$

Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 - f(0)$
- $f'(0) < f(1) - f(0)$  και
- $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 0$  **Μονάδες 4**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ . **Μονάδες 5**

Αν  $g(x) = f(x) - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , τότε:

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο (μονάδες 3) και να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{(x^2 + x) \cdot g(x)} \quad (\text{μονάδες 3}) \quad \text{Μονάδες 6}$$

**Γ4.** Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση  $(x - 2)^2 + y^2 = 2$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $A(0, f(0))$  είναι και εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου (μονάδες 2) και να βρείτε το σημείο επαφής τους  $B$  (μονάδες 1).

**β.** Να αποδείξετε ότι καθώς το κινητό περνάει από το σημείο  $B$ , ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y$  ισούται με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης  $x$ . (μονάδες 4).

**Μονάδες 7**

**Γ5.** Αν  $E$  το εμβαδόν του χωρίου που περιλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$  και την ευθεία  $x = 2$  τότε να αποδείξετε ότι  $E > 2$  **Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 0 \\ \eta\mu x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο  $A(0,1)$

(μονάδες 3) και σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{\pi}{4}$ . (μονάδες 3) **Μονάδες 6**

**Δ2.** Δίνονται τα σημεία  $K(2,0)$ ,  $\Lambda(2,2)$ ,  $M(4,2)$  και  $N(4,0)$

**α.** Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου  $K\Lambda MN$ . (μονάδες 2)

**β.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει και τις δύο διαγώνιες. (μονάδες 4)

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y=0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της

$f$  στο  $-\infty$  (μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η ασύμπτωτη έχει άπειρα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της  $f$ . (μονάδες 4)

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Για  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι

**α.** το σημείο που η γραφική παράσταση της  $f$  παρουσιάζει μέγιστη τιμή πρώτη φορά είναι

το  $B\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ , ενώ το σημείο που παρουσιάζει ελάχιστη τιμή πρώτη φορά είναι το

$\Gamma\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ . (μονάδες 3)

**β.** υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) < \frac{2004}{2022}x_0$  (μονάδες 4)

**Μονάδες 7**