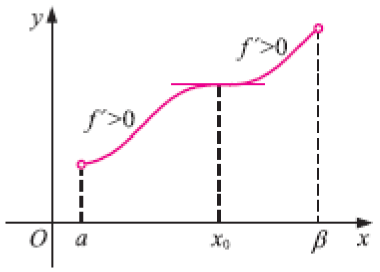
Απαντήσεις τελικού διαγωνίσματος

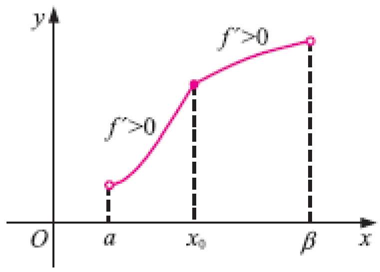
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ' Γενικού Λυκείου

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f.

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

A2. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$

Α3. **α.** 0, **β.** 2. **γ.** 4, **δ.** 6, **ε.** 12

Α4. **α.** Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1, οπότε

- $f(1)=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1^3+3\cdot 1+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha+3+\beta=0$
- $f'(1)=0$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο $f'(x)=3\alpha\cdot x^2+3$

Άρα $f'(1)=0 \Leftrightarrow 3\alpha\cdot 1^2+3=0 \Leftrightarrow 3\alpha=-3 \Leftrightarrow \alpha=-1$

Για $\alpha=-1$ είναι $-1+3+\beta=0 \Leftrightarrow 2+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-2$

Β2. Για $\alpha=-1$ *και* $\beta=-2$, είναι $f(x)=-x^3+3x-2,\quad x\in\mathbb{R}$.

Είναι: $f'(x)=-3x^2+3$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+3=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \quad ή \quad x=1$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f συνοψίζονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $A_1=(-\infty,-1]$, $A_3=[1,+\infty)$

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_2=[-1,1]$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=-1$,

$$f(-1)=-(-1)^3+3\cdot(-1)-2=+1-3-2=-4$$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=1$ το

$$f(1)=-1^3+3\cdot 1-2=-1+3-2=0$$

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $f''(x)=\left(-3x^2+3\right)'=-6x$

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow -6x=0 \Leftrightarrow x=0$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow -6x<0 \Leftrightarrow x>0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow -6x>0 \Leftrightarrow x<0$

Το πρόσημο της f'' και η μονοτονία της f' συνοψίζονται στον πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−
f'	↗		↘

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0]$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=[0,+\infty)$

Η f' παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται μέγιστος για $x=0$

Συνεπώς, το ζητούμενο σημείο το $A(0,f(0))$

Αλλά, $f(0)=-1\cdot 0^3+3\cdot 0-2=-2$

Οπότε $A(0,-2)$

B4. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ell nx}{f'(x)-3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ell nx\cdot\dfrac{1}{f'(x)-3}\right)=+\infty$

γιατί:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ell nx=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}(f'(x)-3)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-3x^2+3-3)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-3x^2)=0$

  και $f'(x)-3=-3x^2+3-3=-3x^2<0$ για x κοντά στο 0^+

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f'(x)-3}=-\infty$

B5. Είναι: $\int_1^e (f(x)\cdot\ell nx)dx=\int_1^e((-x^3+3x-2)\cdot\ell nx)dx$

$$= \int_1^e \left(\left(-\frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x \right)' \cdot \ell nx \right) dx$$

$$= \left[\left(-\frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x \right) \cdot \ell nx \right]_1^e - \int_1^e \left(\left(-\frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x \right) \cdot (\ell nx)' \right) dx$$

$$= \left(-\frac{e^4}{4} + 3 \cdot \frac{e^2}{2} - 2e \right) \cdot \ell ne - \left(-\frac{1^4}{4} + 3 \cdot \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 \right) \cdot \ell n1 - \int_1^e \left(\left(-\frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x \right) \cdot \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{-e^4 + 6e^2 - 8e}{4} - \int_1^e \left(-\frac{x^3}{4} + 3 \cdot \frac{x}{2} - 2 \right) dx$$

$$= \frac{-e^4 + 6e^2 - 8e}{4} - \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^e$$

$$= \frac{-e^4 + 6e^2 - 8e}{4} - \left[\left(-\frac{e^4}{16} + \frac{3e^2}{4} - 2e \right) - \left(-\frac{1}{16} + \frac{3}{4} - \frac{2}{1} \right) \right]$$

$$= \frac{4e^4 + 24e^2 - 32e + e^4 - 12e^2 + 32e - 21}{16} = \frac{-3e^4 + 12e^2 - 2}{16}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **<u>Α΄ τρόπος</u>**

Η f είναι συνεχής για $x = 0$ (αφού είναι παραγωγίσιμη) οπότε είναι:

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x \cdot \frac{f(x)}{x} \right) = 0 \cdot (1 - f(0)) = 0$$

<u>Β΄ τρόπος</u>

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ για x κοντά στο 0 με $\lim_{x \to 0} h(x) = 1 - f(0)$, τότε

Τότε: $f(x) = x \cdot h(x)$ για x κοντά στο 0

Η f είναι συνεχής για $x = 0$ (αφού είναι παραγωγίσιμη) οπότε

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x \cdot h(x)) = 0 \cdot (1 - f(0)) = 0$$

Είναι: $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1-f(0)=1-0=1$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $A(0,f(0))$ είναι: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

άρα: $y-0=1\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=x$

Γ2. Η f συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως παραγωγίσιμη, και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

άρα από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)$$

Αλλά $f'(0)<f(1)-f(0)\Leftrightarrow f'(0)<f'(\xi)$

Είναι $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, συνεχής άρα θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Α' τρόπος

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,\xi]$ οπότε από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα

τουλάχιστον $\xi_1\in(0,\xi)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1)=\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi-0}=\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}>0$

άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ συνεπώς η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Β' τρόπος (Νίκος Σπλήνης)

Άρα, η f' είναι γνησίως μονότονη.

Οπότε, $0<\xi\Leftrightarrow f'(0)<f'(\xi)$ επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ συνεπώς η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$g'(x)=f'(x)-1$ και $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-1=0\Leftrightarrow f'(x)=1\Leftrightarrow x=0$

Είναι για $x<0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)-1<0\Leftrightarrow g'(x)<0$

άρα η g γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,0]$.

Είναι για $x>0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)-1>0\Leftrightarrow g'(x)>0$

άρα η g γνησίως αύξουσα στο $A_2=[0,+\infty)$.

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $g(0) = f(0) - 0 = 0$

άρα $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{(x^2+x)\cdot g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x(x+1)g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{g(x)}\right) = +\infty$

γιατί:
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ και $g(x) > 0$ για x κοντά στο 0, συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{g(x)} = +\infty$

Γ4. α. Η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

και $f(0) = 0, f'(0) = 1$ άρα: $y - 0 = 1\cdot(x - 0) \Leftrightarrow y = x$

Είναι: $\begin{cases}(x-2)^2 + y^2 = 2\\ y = x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2 + x^2 = 2\\ y = x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2 = 0\\ y = x\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2 - 4x + 2 = 0\\ y = x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(x^2 - 2x + 1) = 0\\ y = x\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2(x-1)^2 = 0\\ y = x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - 1 = 0\\ y = x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\ y = x\end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

Άρα, η ευθεία $y = x$ και ο κύκλος $(x-2)^2 + y^2 = 2$ τέμνονται σε ένα σημείο, το $B(1,1)$ οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $A(0, f(0))$ είναι και εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου

β. Έστω $x = x(t)$ και $y = y(t)$ οι συντεταγμένες του κινητού, τη χρονική στιγμή t.

Τη χρονική στιγμή t_0 που το κινητό βρίσκεται στη θέση $B(1,1)$ είναι: $x(t_0) = y(t_0) = 1$

Το κινητό κινείται στον κύκλο $(x-2)^2 + y^2 = 2$ είναι: $(x(t) - 2)^2 + y^2(t) = 2$

Άρα, $\left(\left(x(t)-2\right)^2\right)'+\left(y^2(t)\right)'=0 \Leftrightarrow 2\cdot\left(x(t)-2\right)\cdot x'(t)+2y(t)\cdot y'(t)=0$

$\Leftrightarrow \left(x(t)-2\right)\cdot x'(t)+y(t)\cdot y'(t)=0$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$\left(x(t_0)-2\right)\cdot x'(t_0)+y(t_0)\cdot y'(t_0)=0 \Leftrightarrow (1-2)\cdot x'(t_0)+1\cdot y'(t_0)=0$

$\Leftrightarrow -x'(t_0)+y'(t_0)=0 \Leftrightarrow y'(t_0)=x'(t_0)$

Άρα, καθώς περνάει από το σημείο Β, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y ισούται με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x.

Γ5. Το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=2$ είναι: $E=\int_0^2 |f(x)|dx$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $A\left(0,f(0)\right)$ είναι: $y=x$

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ οπότε $f(x)\geq y$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

Οπότε $f(x)\geq x\geq 0$ για κάθε $x\in[0,2]$

Συνεπώς $\int_0^2 f(x)dx>\int_0^2 xdx \Leftrightarrow E>\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Leftrightarrow E>\frac{2^2}{2} \Leftrightarrow E>2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f(0)=\eta\mu 0+1=1$

Είναι: • $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-\frac{1-x}{1-x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-(1-x)}{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x\cdot(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

Επειδή $\ell im_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\ell im_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\in\mathbb{R}$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Συνεπώς ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(0,1)$

Είναι $f'(0)=εφω \Leftrightarrow 1=εφω \Leftrightarrow ω=\dfrac{\pi}{4}\text{rad}$

Δ2. α. • Για τη ευθεία ΛΝ είναι $\lambda_{ΛΝ}=\dfrac{y_N-y_Λ}{x_N-x_Λ}$ άρα $\lambda_{ΛΝ}=\dfrac{0-2}{4-2}=\dfrac{-2}{2}=-1$

Είναι $(ΛΝ): y-y_Λ=\lambda_{ΛΝ}\cdot(x-x_Λ)$

Άρα $y-2=-1\cdot(x-2)\Leftrightarrow y=-x+2+2$

$\Leftrightarrow y=-x+4 \quad (ΛΝ)$

• Για την ευθεία ΚΜ είναι $\lambda_{ΚΜ}=\dfrac{y_Μ-y_Κ}{x_Μ-x_Κ}$ άρα $\lambda_{ΚΜ}=\dfrac{2-0}{4-2}=\dfrac{2}{2}=1$

Είναι $(ΚΜ): y-y_Μ=\lambda_{ΚΜ}\cdot(x-x_Μ)$

Άρα $y-2=1\cdot(x-4)\Leftrightarrow y=x-4+2\Leftrightarrow y=x-2 \quad (ΚΜ)$

β. • Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x)=f(x)-(-x+4)$ με $x\in[2,4]$

Η Φ είναι συνεχής στο $[2,4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $\Phi(2)=ημ2+1+2-4=ημ2-1<0$

$\Phi(4)=ημ4+1+4-4=ημ4+1>0$

Οπότε $\Phi(2)\cdot\Phi(4)<0$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1\in(2,4)$ ώστε $\Phi(x_1)=0$ άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει την ΛΝ σ' ένα τουλάχιστον σημείο .

• Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=f(x)-(x-2)$ με $x\in[2,4]$.

Η K είναι συνεχής στο $[2,4]$ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $K(2)=f(2)-(2-2)=f(2)=ημ2+1>0$

$K(4)=f(4)-(4-2)=ημ4+1-2=ημ4-1<0$

Οπότε $K(2)\cdot K(4)<0$

Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_2\in(2,4)$ ώστε $K(x_2)=0$

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει την ΚΜ σ ένα τουλάχιστον σημείο.

Δ3. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x}=0$

Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Για $x>0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow ημx+1=0\Leftrightarrow ημx=-1$

$$\Leftrightarrow ημx=ημ\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

Επειδή υπάρχουν άπειροι ακέραιοι $\kappa\in\mathbb{Z}$ άρα η ασύμπτωτη και η γραφική παράσταση της f να έχουν άπειρα κοινά σημεία.

Δ4. α. Για $x>0$, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2

γιατί $ημx\le 1\Leftrightarrow ημx+1\le 2\Leftrightarrow f(x)\le 2$

Άρα $f(x)=2\Leftrightarrow ημx+1=2\Leftrightarrow ημx=1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$

Αλλά $x>0\Leftrightarrow 2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}>0\Leftrightarrow 2\kappa\pi>-\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow \kappa>-\dfrac{1}{4}$

Άρα $\kappa=0$, συνεπώς $x=\dfrac{\pi}{2}$

Επομένως, το σημείο που η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει μέγιστη τιμή για πρώτη φορά είναι το $B\left(\dfrac{\pi}{2},2\right)$.

Για $x>0$, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι το 0

γιατί $ημx\ge -1\Leftrightarrow ημx+1\ge 0\Leftrightarrow f(x)\ge 0$

Άρα $f(x)=0\Leftrightarrow ημx+1=0\Leftrightarrow ημx=-1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{2},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$

Αλλά $x>0\Leftrightarrow 2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{2}>0\Leftrightarrow 2\kappa\pi>\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow \kappa>\dfrac{1}{4}$

Άρα $\kappa = 1$, συνεπώς $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

Συνεπώς το σημείο που η γραφική παράσταση f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για πρώτη φορά είναι το $\Gamma\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$.

β. Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Είναι: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

Αλλά, $0 < \frac{2004}{2022} < 2$ οπότε υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ώστε $f(x_0) = \frac{2004}{2022}$

Είναι: $1 < \frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2004}{2022} < \frac{2004}{2022}x_0 \Leftrightarrow f(x_0) < \frac{2004}{2022}x_0$

Άρα, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) < \frac{2004}{2022}x_0$